
**MENENTUKAN PANJANG BUSUR TERPENDEK DARI LINGKARAN YANG
MENGHUBUNGKAN SEBARANG DUA TEMPAT DI PERMUKAAN BUMI
MENGUNAKAN KEMONOTONAN FUNGSI YANG TERDIFERENSIALKAN**

Muhamad Indra Alamsyah¹⁾

¹⁾Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: wathiii28@gmail.com¹⁾

Kabil Djafar^{1,a)}, Herdi Budiman^{1,b)}, Wayan Somayasa^{1,c)}, Rita Ayu Ningtyas^{1,d)}, dan Aswani^{1,e)}

¹⁾Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia

Email: ^{a)}kabildjafar@uho.ac.id, ^{b)}herdi.budiman@yahoo.com, ^{c)}wayan.somayasa@uho.ac.id, ^{d)}ritaayu777@gmail.com, dan
^{e)}aswani.mtmk@uho.ac.id

ABSTRAK

Tujuan penelitian ini adalah menentukan panjang busur terpendek dari lingkaran yang menghubungkan sebarang dua empat di permukaan bumi dengan menggunakan sifat kemonotonan fungsi yang terdiferensialkan. Penelitian ini dilakukan dengan mengasumsikan bumi berbentuk bola sempurna yang mengimplikasikan setiap irisan bumi membentuk lingkaran besar atau lingkaran kecil. Dua titik P dan Q pertama-tama ditentukan dalam koordinat lintang dan bujur. Setelah itu, koordinat lintang dari P dan Q ditransformasi sedemikian sehingga keduanya berada pada lintang yang sama. Kedua titik itu kemudian dikonversi ke dalam sistem koordinat kartesius tiga dimensi. Tiga jenis lingkaran ditentukan sebagai lingkaran kecil C_k , lingkaran sedang C_r , dan lingkaran besar C_b . Ditemukan bahwa ada tak hingga banyaknya lingkaran yang melalui P dan Q . Panjang busur \widehat{PQ} pada masing-masing lingkaran ditentukan dengan bantuan geometri analitik yaitu berturut-turut S_k , S_r , dan S_b . Dua fungsi dari λ didefinisikan sebagai $f(\lambda) := S_k(\lambda) - S_r(\lambda)$ dan $g(\lambda) := S_r(\lambda) - S_b(\lambda)$, di mana λ menyatakan bujur dari titik Q . Turunan dari f dan g dievaluasi dan dianalisis. Hasil menunjukkan bahwa f dan g monoton dan mengimplikasikan bahwa $S_b \leq S_r \leq S_k$. Ini berarti bahwa panjang busur yang terpendek adalah busur lingkaran besar yaitu S_b .

Kata kunci: bumi, kemonotonan, lingkaran kecil, lingkaran sedang, lingkaran besar.

ABSTRACT

The Objective of this study is to determine the shortest arc length of circles connecting any two places on the earth's surface by using the monotonicity of differentiable function. This study was conducted by assuming the earth as a perfect sphere, which implies any section of the earth forming great circles or small circles. Two points P and Q were first initiated in the form of longitude and latitude coordinates. After that, the latitudes of P and Q were transformed such that their latitudes are equal. Those two points were then converted into three dimensional cartesian coordinate. Three circles which pass through those points were determined as small circle C_k , medium circle C_r , and great circle C_b . It was found that there are infinitely many circles that pass through P and Q . The length of arc \widehat{PQ} on each circle was determined by using analytical geometry which are S_k , S_r , and S_b respectively. Two functions of λ were defined as $f(\lambda) := S_k(\lambda) - S_r(\lambda)$ and $g(\lambda) := S_r(\lambda) - S_b(\lambda)$, since λ represents the longitude of point Q . The derivatives of f and g were evaluated and analyzed. Results show that f and g are monotone and implying $S_b \leq S_r \leq S_k$. This means that the shortest arc length is the great circle arc length S_b .

Keywords: the earth, monotonicity, small circle, medium circle, great circle.

1. Pendahuluan

Salah satu cabang dalam ilmu matematika adalah geometri. Objek yang dikaji dalam bidang geometri biasanya direpresentasikan sebagai kurva oleh suatu persamaan tertentu. Hal ini merupakan ide dasar yang disebut dengan geometri analitik. Geometri analitik juga sering disebut dengan geometri koordinat. Sistem koordinat yang sering digunakan untuk

merepresentasikan bentuk geometri misalnya sistem koordinat kartesius dan koordinat bola terkait bentuk tiga dimensi, dimana hubungan antara kedua sistem koordinat dapat dengan mudah ditentukan [27].

Titik dipandang sebagai suatu perpotongan dari tiga buah bidang. Posisi atau kedudukan suatu titik dalam sistem koordinat kartesius tiga dimensi dapat ditentukan secara persis. Kedudukan titik-titik dalam

koordinat kartesius dapat menyerupai suatu bentuk kemudian dinyatakan sebagai persamaan. Kedudukan titik-titik yang membentuk garis dapat dinyatakan dalam persamaan yang disebut persamaan garis. Kedudukan titik-titik yang membentuk kerucut dapat dinyatakan dalam persamaan yang disebut persamaan kerucut. Kedudukan titik-titik yang membentuk bola dapat dinyatakan dalam persamaan yang disebut persamaan bola dan seterusnya [20].

Bumi secara matematis dapat diasumsikan sebagai objek geometri berbentuk bola sempurna (perfect sphere) yang kemudian disebut bola bumi. Kedudukan titik-titik pada permukaan bumi dapat direpresentasikan dengan koordinat lintang yang dinyatakan dalam North (N) atau South (S) merupakan pengukuran pada lokasi di bumi ke arah utara atau selatan khatulistiwa (equator) dan koordinat bujur yang dinyatakan dalam West (W) atau East (E) merupakan pengukuran pada lokasi di bumi ke arah barat atau timur meridian utama dalam hal ini garis meridian yang melalui Greenwich [14].

Berbeda dengan jarak dua titik pada sistem koordinat kartesius yang merupakan garis lurus, jarak dua tempat di permukaan bumi akan tampak seperti lengkungan potongan lingkaran terlebih dengan jarak yang cukup jauh. Terdapat banyak kemungkinan jarak yang dapat ditempuh untuk berpindah dari satu tempat ke tempat lain di permukaan bumi. Hal itu bergantung pada lintasan yang dipilih. Namun, lintasan terpendek dari semua kemungkinan itu adalah lintasan yang berhimpit dengan sebuah lingkaran yang berpusat di pusat bola bumi yang disebut great circle (lingkaran besar). Dengan kata lain, jarak terpendek dari sebarang dua titik di permukaan bumi merupakan panjang suatu busur lingkaran besar yang melalui keduanya yang kemudian disebut dengan great circle distance (jarak lingkaran besar) [27].

Selain lingkaran besar, terdapat pula lingkaran kecil (small circle) yang suatu busurnya menjadi lintasan sebarang dua tempat di permukaan bumi Darmayanto [6]. Lingkaran kecil telah lama diperkenalkan dalam bidang geografi dan navigasi. Dalam [7, 13, 17] didefinisikan lingkaran kecil pada permukaan bola bumi sebagai lingkaran pada permukaan bumi yang bukan merupakan lingkaran besar.

Varberg [27] mengatakan bahwa sistem koordinat bola (spherical coordinate) dan sistem koordinat lintang dan bujur memiliki kemiripan. Sistem koordinat lintang dan bujur bahkan dapat ditransformasi ke dalam sistem koordinat kartesius secara langsung. Lu [14] dalam bukunya Introduction to Geodetic Datum and Geodetic Systems, memaparkan hubungan antara kedua sistem koordinat. Lingkaran-lingkaran pada permukaan bumi yang direpresentasikan dengan geometri analitik dapat

dianalisis dengan memanfaatkan sifat kemonotonan fungsi yang terdiferensialkan [6].

Pada bagian kedua akan dibahas mengenai metode yang diterapkan dalam menyelesaikan penelitian. Pada bagian ketiga akan dibahas mengenai hasil penelitian yang dilakukan berdasarkan prosedur yang ada pada bagian dua. Pada bagian keempat membahas tentang kesimpulan yang berisi tentang uraian singkat tentang hasil penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

2. Metodologi Penelitian

2.1 Sistem Koordinat

Sistem koordinat adalah sistem yang digunakan untuk menentukan lokasi suatu titik. Ada tiga sistem koordinat yang digunakan dalam penelitian ini yaitu sistem koordinat kartesius tiga dimensi, bola, dan sistem koordinat lintang-bujur.

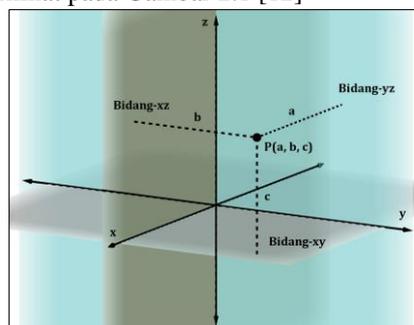
Suatu titik P dalam sistem koordinat tiga dimensi ditentukan oleh pasangan terurut berbentuk (a, b, c) dengan a , b , dan c adalah sebagai berikut.

a = jarak dari bidang- yz ke P

b = jarak dari bidang- xz ke P

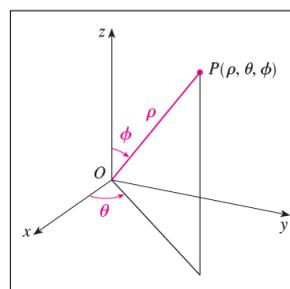
c = jarak dari bidang- xy ke P .

Ilustrasi titik dalam sistem koordinat tiga dimensi dapat dilihat pada Gambar 2.1 [12]



Gambar 2.1 Titik dalam Sistem Koordinat Ruang

Koordinat bola suatu titik P dalam ruang adalah (ρ, θ, ϕ) dimana ρ adalah jarak P dari titik asal, θ adalah sudut antara sumbu- x positif dan proyeksi segmen garis OP pada bidang- xy , serta ϕ adalah sudut antara sumbu- z positif dan segmen garis OP . Titik dalam sistem koordinat bola diilustrasikan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Titik dalam Sistem Koordinat Bola

Hubungan antara sistem koordinat kartesius dan koordinat bola adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dengan rumus jaraknya adalah

$$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \quad (2.2)$$

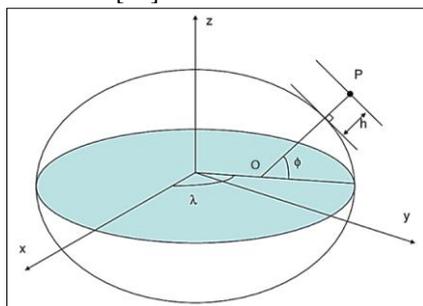
Hubungan tersebut dapat digunakan untuk mengubah representasi titik dari sistem koordinat bola ke sistem koordinat kartesius [21].

Sistem koordinat lintang-bujur diperoleh dari sistem koordinat geodetik dengan ketinggian sama dengan nol. Koordinat suatu titik P dalam sistem koordinat geodetik diukur berdasarkan garis lintang, garis bujur, dan suatu ketinggian h dengan asumsi bumi berbentuk elipsoid.

Koordinat lintang suatu titik P adalah sudut yang dibentuk suatu garis normal elipsoid terhadap bidang *equator* seperti sudut ϕ pada Gambar 2.3. Koordinat lintang diukur ke arah kutub utara atau kutub selatan dari bidang *equator*.

Koordinat bujur suatu titik P adalah sudut dihedral antara suatu bidang meridian dan bidang meridian utama seperti λ pada Gambar 2.3. Meridian utama bumi adalah meridian yang melalui distrik Greenwich di Inggris.

Koordinat ketinggian suatu titik P adalah jarak langsung permukaan bumi ke titik P yaitu panjang segmen garis dari permukaan bumi ke titik P yang segaris dengan garis normal elipsoid. Koordinat ketinggian suatu titik P adalah jarak langsung permukaan bumi ke titik P yaitu panjang segmen garis dari permukaan bumi ke titik P yang segaris dengan garis normal elipsoid. Koordinat ketinggian titik P dapat dilihat pada Gambar 2.3 yang dilambangkan dengan h . Jika $h = 0$, maka titik P berada tepat pada permukaan bumi [14].

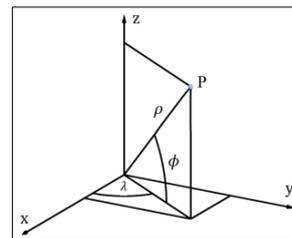


Gambar 2.3 Sistem Koordinat Geodetik

Sistem koordinat lintang-bujur dapat diterapkan dengan asumsi bumi yang berbentuk bola sempurna (*perfect sphere*). Jika bumi diasumsikan sebagai bola sempurna, maka titik yang berpadanan dengan titik O pada Gambar 2.3 akan berada pada pusat bola bumi karena garis \overline{OP} adalah garis normal bumi. Menurut

Tamássy [24], garis normal bola akan melalui titik pusat bola. Koordinat lintang dan bujur dengan asumsi bumi yang menyerupai bola sempurna mirip dengan koordinat dalam sistem koordinat bola dengan radius (ρ) konstan yaitu radius bumi [27]. Sehingga koordinat lintang (ϕ) dan koordinat bujur (λ) pada sistem koordinat ruang dapat diilustrasikan dalam Gambar 2.4. Menurut [14], hubungan sistem koordinat lintang-bujur dan sistem koordinat tiga dimensi adalah

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \cos \lambda \\ y &= \rho \cos \phi \sin \lambda \\ z &= \rho \sin \phi \end{aligned} \quad (2.3)$$

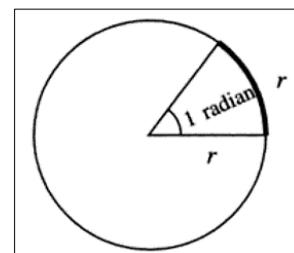


Gambar 2.4 Koordinat Lintang-Bujur pada Sistem Koordinat Ruang

2.2 Lingkaran dan Sudut

Lingkaran secara konseptual didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik pada bidang dengan jarak tertentu dari sebuah titik tetap. Titik tetap dari suatu lingkaran disebut dengan pusat lingkaran, dan jarak tentu itu disebut jari-jari (radius) [5].

Sudut dapat diukur dalam derajat maupun radian. Satu derajat ($^\circ$) didefinisikan sebagai ukuran sudut pusat yang dibentuk oleh busur lingkaran sebesar $\frac{1}{360}$ dari keliling lingkaran. Satu menit ($'$) adalah $\frac{1}{60}$ derajat. Satu detik adalah $\frac{1}{60}$ menit. Satu radian (rad) didefinisikan sebagai ukuran dari sudut pusat yang dibentuk oleh busur lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jari lingkaran.

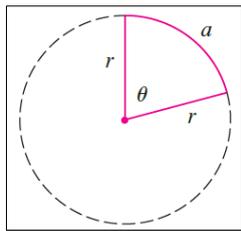


Gambar 2.5 Ukuran Sudut Satu Radian

Keliling lingkaran sama dengan 2π (jari-jari) dan membentuk sudut sebesar 360° . Maka 2π radian sama dengan 360° , sehingga diperoleh

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \quad (2.4)$$

[19].



Gambar 2.6 Sudut yang Menghadap Busur Lingkaran

Gambar 2.6 menampilkan sebuah lingkaran dengan jari-jari r dengan θ adalah sudut pusat yang menghadap busur dengan panjang a . Diketahui bahwa panjang busur sebanding dengan ukuran sudutnya dan keliling lingkaran adalah $2\pi r$ dengan sudut pusat 2π rad, maka diperoleh

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r} \quad (2.5)$$

yang jika diselesaikan diperoleh hubungan antara sudut pusat θ yang menghadap suatu busur dengan panjang a sebagai berikut.

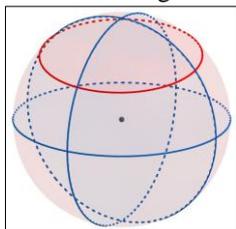
$$\theta = \frac{a}{r} \quad a = r\theta \quad (2.6)$$

[21].

2.3 Bola Bumi

Bumi yang diasumsikan berbentuk bola sempurna (perfect sphere) disebut bola bumi. Asumsi bumi berbentuk bola sempurna sering digunakan dalam penelitian misalnya yang dilakukan oleh Still & Nealon [22] serta Mahmoud & Akkari [15].

Irisan bola bumi membentuk lingkaran di permukaannya. Lingkaran besar (*great circle*) merupakan lingkaran yang tercipta akibat membagi bola bumi menjadi dua bagian yang sama besar [8]. Sehingga pusat lingkaran besar berada pada pusat bola bumi. Lingkaran di permukaan bumi yang bukan lingkaran besar disebut lingkaran kecil (*small circle*). Garis-garis lintang yang bukan garis khatulistiwa merupakan lingkaran kecil [17]. Lintasan yang menghubungkan dua titik di bumi dan berhimpit dengan busur lingkaran besar disebut dengan lintasan lingkaran besar dan jaraknya disebut dengan jarak lingkaran besar (*great circle distance*). Jarak lingkaran besar ini adalah jarak terpendek lintasan yang menghubungkan dua tempat di bumi [2]. Lingkaran merah pada Gambar 2.7 adalah ilustrasi lingkaran kecil dan yang biru adalah ilustrasi lingkaran besar.

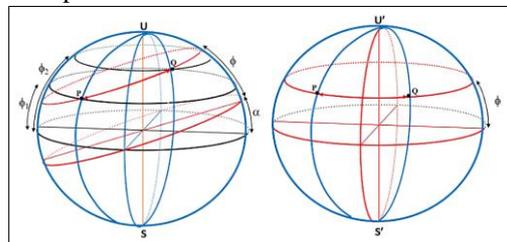


Gambar 2.7 Lingkran Kecil dan Besar

2.4 Transformasi Koordinat Lintang

Dua buah titik P dan Q di permukaan bumi yang memiliki koordinat lintang berbeda dapat ditransformasi sedemikian sehingga memiliki koordinat lintang yang sama terhadap koordinat lintang yang baru. Patokan pengukuran koordinat lintang adalah bidang equator. Sehingga transformasi yang dilakukan adalah merotasi bidang equator pada suatu sudut α mengikuti kemiringan koordinat lintang dari titik P dan Q . Bidang equator yang diperoleh melalui transformasi sejajar dengan suatu lingkaran kecil yang melalui kedua titik itu.

Misalkan koordinat titik P adalah $\phi_1^\circ LU$ dan $\lambda_1^\circ BT$. Misalkan pula koordinat titik Q adalah $\phi_2^\circ LU$ dan $\lambda_2^\circ BT$. Maka sudut α dapat dipilih dengan melihat ilustrasi pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Transformasi Koordinat Lintang

Setelah dilakukan transformasi, titik P dan Q memiliki sudut lintang yang sama katakan ϕ . Dari koordinat lintang P , diperoleh $\phi = \phi_1 + \alpha$. Sedangkan dari koordinat lintang Q , diperoleh $\phi = \phi_2 - \alpha$. Sehingga diperoleh

$$\alpha = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \quad (2.7)$$

[6].

2.5 Fungsi

Misalkan $A \times B$ adalah himpunan semua pasangan terurut berbentuk (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$ maka fungsi dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1 [1]: Misalkan A dan B adalah himpunan. Maka suatu fungsi dari A ke B adalah himpunan f dari pasangan terurut dalam $A \times B$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ terdapat secara tunggal $b \in B$ di mana $(a, b) \in f$. Dengan kata lain, jika $(a, b) \in f$ dan $(a, b') \in f$, maka $b = b'$.

Definisi 2.2 [21]: Turunan fungsi $f(x)$ dituliskan $f'(x)$ adalah

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Asalkan limitnya ada.

Definisi 2.3 [21]: Suatu fungsi f dikatakan terdiferensialkan di a jika $f'(a)$ ada. Fungsi f dikatakan terdiferensialkan pada suatu selang buka

(a, b) [atau (a, ∞) atau $(-\infty, a)$ atau $(-\infty, \infty)$], jika f terdiferensialkan di setiap titik dalam selang tersebut.

Definisi 2.4 [1]: Fungsi yang naik atau turun pada A disebut fungsi yang monoton pada A . Fungsi yang naik atau turun sejati pada A disebut fungsi yang monoton sejati pada A .

Teorema Kemonotonan Fungsi [10]: Misalkan f mempunyai turunan pada (a, b) .

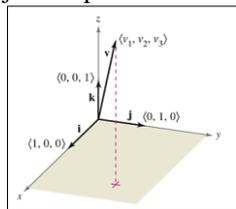
1. Jika $f'(x) \geq 0$ untuk tiap $x \in (a, b)$ maka f naik pada $[a, b]$. Jika $f'(x) > 0$ untuk tiap $x \in (a, b)$ maka f naik sejati pada $[a, b]$.
2. Jika $f'(x) \leq 0$ untuk tiap $x \in (a, b)$ maka f turun pada $[a, b]$. Jika $f'(x) < 0$ untuk tiap $x \in (a, b)$ maka f turun sejati pada $[a, b]$.

2.6 Vektor dalam Ruang

Vektor dalam ruang dinotasikan sebagai $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Vektor nol dinotasikan sebagai $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$. Dengan menggunakan vektor satuan $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, dan $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ dalam arah sumbu-z positif, notasi vektor satuan sandar bagi \mathbf{v} adalah

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

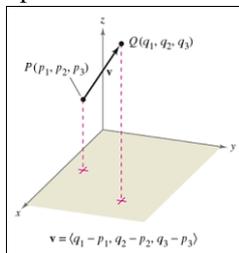
Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Kombinasi Vektor Satuan

Jika \mathbf{v} direpresentasikan sebagai segmen garis dari titik $P(p_1, p_2, p_3)$ ke titik $Q(q_1, q_2, q_3)$, komponen dari \mathbf{v} diperoleh dengan mengurangkan koordinat-koordinat titik ujung dengan koordinat titik pangkal yaitu

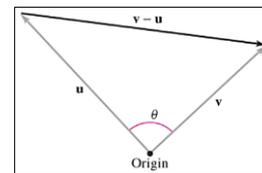
$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3 \rangle$ yang diilustrasikan pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10 Segmen Garis Antara Dua Titik

Misalkan $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ dan $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ adalah vektor-vektor dalam ruang dan misalkan pula c adalah skalar. Maka dapat didefinisikan beberapa hal sebagai berikut.

1. Kesamaan: $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ jika dan hanya jika $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, dan $u_3 = v_3$.
2. Bentuk komponen: Jika \mathbf{v} direpresentasikan oleh segmen garis dari titik $P(p_1, p_2, p_3)$ ke titik $Q(q_1, q_2, q_3)$, maka $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3 \rangle$.
3. Panjang vektor: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
4. Vektor satuan dalam arah \mathbf{v} : $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right)\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
5. Penjumlahan vektor: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$.
6. Perkalian dengan skalar: $c\mathbf{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$.
7. Hasil kali titik: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.
Dua buah vektor dalam ruang dapat membentuk sudut. Sudut antara dua vektor tak nol adalah suatu sudut θ , di mana $0 \leq \theta \leq \pi$, yaitu sudut antara vektor posisi standarnya seperti pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Sudut Antara Dua Vektor

Rumus yang digunakan untuk menentukan sudut antara dua vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \quad (2.8)$$

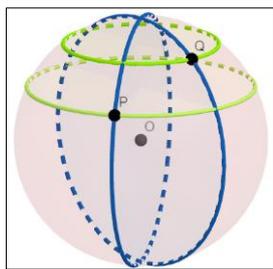
Lihat [12]

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Lingkaran yang Menghubungkan Sebarang Dua Tempat di Bumi

Tempat atau lokasi di permukaan bumi dapat dipandang sebagai titik pada permukaan bumi. Titik pada permukaan bumi dalam ilmu geografi ditentukan dengan menggunakan sistem koordinat lintang-bujur. Sistem koordinat lintang-bujur sendiri merupakan sistem koordinat geodetik dengan ketinggian h sama dengan nol. Titik pada permukaan bumi dinyatakan dalam koordinat lintang yaitu $^{\circ}LS$ (lintang selatan) atau $^{\circ}LU$ (lintang utara) dan koordinat bujur yaitu $^{\circ}BB$ (bujur barat) atau $^{\circ}BT$ (bujur timur).

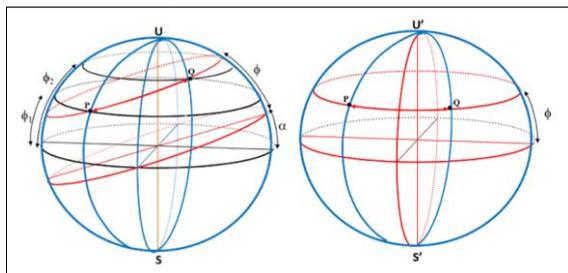
Tanpa mengurangi keumuman, misalkan P adalah sebuah titik pada permukaan bumi yang posisinya berada pada $\phi_1^{\circ}LU$ dan $\lambda_1^{\circ}BT$. Misalkan pula titik Q pada permukaan bumi berlokasi pada $\phi_2^{\circ}LU$ dan $\lambda_2^{\circ}BT$. Agar lebih sederhana, koordinat titik P dan Q berturut-turut dapat dituliskan sebagai $P(\phi_1^{\circ}LU, \lambda_1^{\circ}BT)$ dan $Q(\phi_2^{\circ}LU, \lambda_2^{\circ}BT)$. Ilustrasi diberikan oleh Gambar 4.1 di mana garis hijau merepresentasikan koordinat lintang dan garis biru merepresentasikan koordinat bujur dari kedua titik.



Gambar 4.1 Dua Titik pada Permukaan Bumi

Transformasi Koordinat Lintang

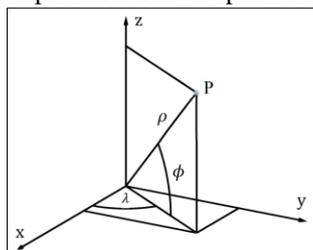
Transformasi koordinat lintang dilakukan terhadap titik $P(\phi_1 LU, \lambda_1 BT)$ dan $Q(\phi_2 LU, \lambda_2 BT)$ yaitu dengan merotasi bidang *equator* pada sudut $\alpha := \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$ mengikuti kemiringan dari koordinat lintang titik P dan Q . Sebagai akibatnya, P dan Q memiliki koordinat lintang yang sama jika posisinya ditentukan berdasarkan bidang *equator* yang baru. Ilustrasi diberikan oleh **Gambar 4.2**.



Gambar 4.2 Transformasi Koordinat Titik P dan Q

Misalkan ϕ rad adalah koordinat lintang yang baru dari P dan Q . Maka, dari lintang P , ϕ rad = $\phi_P^\circ = (\phi_1 + \alpha)^\circ$. Di sisi lain, dari lintang Q , ϕ rad = $\phi_Q^\circ = (\phi_1 - \alpha)^\circ$. Agar lebih sederhana, diasumsikan P dilalui oleh garis meridian utama sehingga koordinat bujur untuk P adalah $\lambda_1 = 0$. Lebih lanjut, garis meridian yang dilalui oleh Q adalah $\lambda_2^\circ = \lambda$ rad. Misalkan LU' menyatakan lintang utara yang baru dan BT' menyatakan bujur timur yang baru. Maka koordinat P dan Q yang baru dapat dinyatakan secara berturut-turut sebagai $P(\phi LU', 0 BT')$ dan $Q(\phi LU', \lambda BT')$ dengan $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ dan $0 \leq \lambda \leq \pi$.

Koordinat lintang bujur pada sistem koordinat tiga dimensi dapat diilustrasikan pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Koordinat Lintang-Bujur pada Sistem Koordinat Ruang

di mana koordinat lintang dan bujur terhadap koordinat tiga dimensi dapat dihubungkan dengan persamaan parameter berikut.

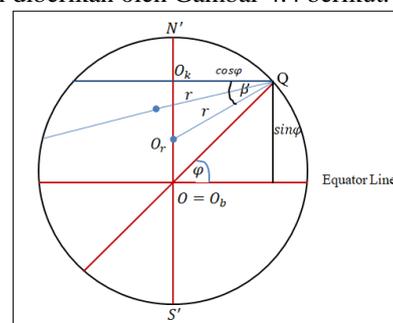
$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \cos \lambda \\ y &= \rho \cos \phi \sin \lambda \\ z &= \rho \sin \phi \end{aligned}$$

Sebagai akibat dari asumsi, nilai ρ dalam hal ini adalah 1. Sehingga koordinat lintang dan bujur titik P dan Q yang baru dapat dinyatakan dalam sistem koordinat tiga dimensi oleh

$$\begin{aligned} P &= (\cos \phi, 0, \sin \phi) \\ Q &= (\cos \phi \cos \lambda, \cos \phi \sin \lambda, \sin \phi) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pembagian Lingkaran

Ada tak hingga banyaknya lingkaran yang melalui titik P dan Q . Tanpa mengurangi keumuman, Lingkaran yang melalui P dan Q dapat dibagi menjadi lingkaran kecil C_k , lingkaran sedang C_r , dan lingkaran besar C_b . Lingkaran kecil C_k adalah lingkaran yang sejajar dengan bidang *equator* dengan jari-jari $r_k = \cos \phi$. Lingkaran C_b adalah lingkaran besar yang jari-jarinya adalah $r_b = 1$. Serta Lingkaran C_r adalah lingkaran yang jari-jarinya adalah r dengan $\cos \phi \leq r \leq 1$ dan $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Untuk sebarang lingkaran sedang pada bola bumi, terdapat suatu C_r yang pusatnya terletak pada sumbu koordinat sedemikian sehingga jari-jarinya yaitu $r = \|\vec{O_r P}\| = \|\vec{O_r Q}\|$. Ilustrasi diberikan oleh Gambar 4.4 berikut.



Gambar 4.4 Pembagian lingkaran dari titik Q

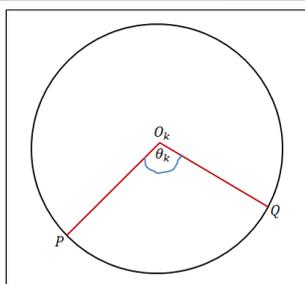
Masing-masing lingkaran akan diobservasi sebagai berikut.

1. Lingkaran Kecil C_k

Lingkaran C_k pada Gambar 4.5 berpusat di O_k dengan sudut pusat yang menghadap busur \widehat{PQ} adalah θ_k . Panjang jari-jari lingkaran C_k yaitu r_k , sudut pusat θ_k serta panjang busur \widehat{PQ} akan ditentukan pada sub-bagian ini.

Titik O_k berada pada sumbu koordinat. Maka berdasarkan Gambar 4.4 koordinat titik O_k dapat dituliskan sebagai berikut.

$$O_k = (0, 0, \sin \phi) \quad (4.2)$$



Gambar 4.5 Lingkaran Kecil

Dari (4.1) dan (4.2) diperoleh vektor-vektor

$$\overrightarrow{O_k P} = \langle \cos \phi, 0, 0 \rangle$$

dan

$$\overrightarrow{O_k Q} = \langle \cos \phi \cos \lambda, \cos \phi \sin \lambda, 0 \rangle$$

dengan

$$\|\overrightarrow{O_k P}\| = \|\overrightarrow{O_k Q}\| = \cos \phi \quad (4.4)$$

Modulus $\overrightarrow{O_k P}$ yaitu $\|\overrightarrow{O_k P}\| = \|\overrightarrow{O_k Q}\| = \cos \phi$ adalah jari-jari lingkaran kecil yaitu r_k . Dengan menggunakan hasil kali titik dari dua vektor, maka dari (4.3) dan (4.4) diperoleh sudut antara $\overrightarrow{O_k Q}$ dan $\overrightarrow{O_k P}$ yaitu θ_k di mana

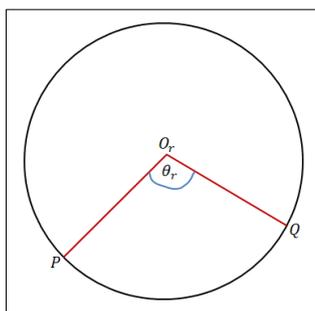
$$\theta_k = \lambda \quad (4.5)$$

Setelah itu, dengan menggunakan konsep sudut radian yang menghadap suatu busur lingkaran, maka dari (4.4) dan (4.5) dapat ditentukan panjang busur \widehat{PQ} pada lingkaran C_k katakan S_k di mana

$$S_k = \theta_k r_k = \lambda \cos \phi \quad (4.6)$$

2. Lingkaran Sedang C_r

Lingkaran C_r pada Gambar 4.6 berpusat di O_r dengan sudut pusat yang menghadap busur \widehat{PQ} adalah θ_r . Panjang jari-jari lingkaran C_r yaitu r , sudut pusat θ_r serta panjang busur \widehat{PQ} akan ditentukan pada sub-bagian ini.



Gambar 4.6 Lingkaran Sedang

Berdasarkan Gambar 4.4 dan Gambar 4.6, koordinat dari pusat lingkaran C_r yaitu O_r adalah

$$O_r = (0, 0, \sin \phi - \cos \phi \tan \beta) \quad (4.7)$$

Dengan mengurangkan (4.1) dengan (4.7) maka diperoleh vektor-vektor

$$\overrightarrow{O_r P} = \langle \cos \phi, 0, \cos \phi \tan \beta \rangle,$$

$$\overrightarrow{O_r Q} = \langle \cos \phi \cos \lambda, \cos \phi \sin \lambda, \cos \phi \tan \beta \rangle. \quad (4.8)$$

di mana

$$\|\overrightarrow{O_r P}\| = \|\overrightarrow{O_r Q}\| = \frac{\cos \phi}{\cos \beta} = r \quad (4.9)$$

yang tidak lain adalah jari-jari lingkaran sedang C_r . Sudut antara vektor $\overrightarrow{O_r P}$ dan $\overrightarrow{O_r Q}$ berpadanan dengan θ_r pada Gambar 4.6. Sudut θ_r dapat ditentukan dengan rumus sudut antara dua vektor yaitu

$$\cos \theta_r = \frac{\overrightarrow{O_r P} \cdot \overrightarrow{O_r Q}}{\|\overrightarrow{O_r P}\| \|\overrightarrow{O_r Q}\|}$$

yang jika dievaluasi menggunakan (4.8) dan (4.9) diperoleh

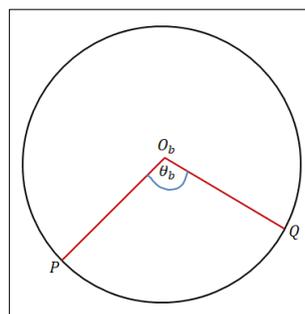
$$\theta_r = \cos^{-1}(\cos^2 \beta \cos \lambda + \sin^2 \beta) \quad (4.10)$$

Dari (4.9) dan (4.10) diperoleh

$$S_r = r \theta_r = \frac{\cos \phi}{\cos \beta} \cos^{-1}(\cos^2 \beta \cos \lambda + \sin^2 \beta) \quad (4.11)$$

3. Lingkaran Besar C_b

Lingkaran C_b pada Gambar 4.7 berpusat di O_b dengan sudut pusat yang menghadap busur \widehat{PQ} adalah θ_b . Panjang jari-jari lingkaran C_b yaitu r_b , sudut pusat θ_b serta panjang busur \widehat{PQ} akan ditentukan pada sub-bagian ini.



Gambar 4.7 Lingkaran Besar

Pusat lingkaran C_b ada pada pusat bola bumi. Akibatnya pusat lingkaran C_b dapat diekspresikan sebagai

$$O_b(0, 0, 0) \quad (4.12)$$

Dari (4.1) dan (4.12) diperoleh vektor-vektor

$$\overrightarrow{O_b P} = \langle \cos \phi, 0, \sin \phi \rangle$$

dan

$$\overrightarrow{O_b Q} = \langle \cos \phi \cos \lambda, \cos \phi \sin \lambda, \sin \phi \rangle \quad (4.13)$$

yang panjangnya adalah

$$\|\overrightarrow{O_b P}\| = \|\overrightarrow{O_b Q}\| = 1 \quad (4.14)$$

Faktanya, persamaan (4.14) adalah jari-jari dari lingkaran besar yaitu r_b yang juga merupakan jari-jari bola. Dari (4.13) dan (4.14) dengan menggunakan hasil kali titik dari dua buah vektor maka diperoleh sudut antara $\overrightarrow{O_b P}$ dan $\overrightarrow{O_b Q}$ adalah θ_b yaitu

$$\theta_b = \cos^{-1}(\cos^2 \phi \cos \lambda + \sin^2 \phi) \quad (4.15)$$

Sehingga dari (4.14) dan (4.15) dapat ditentukan panjang busur \widehat{PQ} pada lingkaran besar C_b adalah S_b yaitu

$$S_b = r_b \theta_b = \cos^{-1}(\cos^2 \phi \cos \lambda + \sin^2 \phi) \quad (4.16)$$

3.2 Menentukan Panjang Busur Terpendek

Menentukan panjang busur terpendek dari lingkaran yang melalui titik P dan Q dilakukan dengan membandingkan panjang busur \widehat{PQ} pada lingkaran kecil C_k katakan S_k , pada lingkaran sedang C_r katakan S_r , pada lingkaran besar C_b katakan S_b . Hasil perbandingan secara matematis akan ditentukan dengan melihat hubungan ketaksamaan antara S_k , S_r , dan S_b . Mula-mula didefinisikan fungsi $f := S_k - S_r$ dan $g = S_r - S_b$ yang bergantung pada variabel λ . Kemudian kedua fungsi tersebut masing-masing dievaluasi turunannya dengan analisis sebagai berikut.

Analisis Fungsi f

Fungsi f yang bergantung pada λ didefinisikan sebagai $f(\lambda) = S_k(\lambda) - S_r(\lambda)$. Sehingga dari persamaan (4.6) dan (4.11) maka

$$f(\lambda) = S_k(\lambda) - S_r(\lambda) = \lambda \cos \phi - \frac{\cos \phi}{\cos \beta} \cos^{-1}(\cos^2 \beta \cos \lambda + \sin^2 \beta) \quad (4.17)$$

Jelas bahwa fungsi f kontinu pada $0 \leq \lambda \leq \pi$. Jika f diturunkan terhadap λ pada $0 < \lambda < \pi$ maka

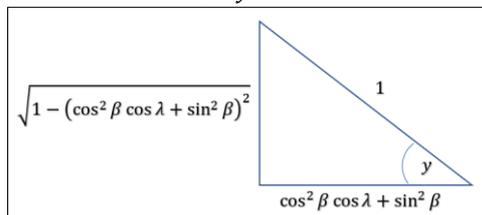
$$f'(\lambda) = \cos \phi - \frac{\cos \phi}{\cos \beta} \frac{d}{d\lambda} \cos^{-1}(\cos^2 \beta \cos \lambda + \sin^2 \beta)$$

Misalkan $y = \cos^{-1}(\cos^2 \beta \cos \lambda + \sin^2 \beta)$ maka $\cos y = \cos^2 \beta \cos \lambda + \sin^2 \beta$ yang jika kedua ruas diturunkan terhadap λ maka

$$\frac{d}{d\lambda} \cos y = \frac{d}{d\lambda} (\cos^2 \beta \cos \lambda + \sin^2 \beta)$$

$$\rightarrow -\sin y \frac{dy}{d\lambda} = -\sin \lambda \cos^2 \beta$$

$$\rightarrow \frac{dy}{d\lambda} = \frac{\cos^2 \beta \sin \lambda}{\sin y}$$



Gambar 4.8 Ilustrasi y Sebagai Sudut

Berdasarkan Gambar 4.8, maka

$$\begin{aligned} \sin y &= \sqrt{1 - (\cos^2 \beta \cos \lambda + \sin^2 \beta)^2} \\ &= \sqrt{1 - ((\cos^2 \beta \cos \lambda)^2 + (\sin^2 \beta)^2 + 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \cos \lambda)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1 - \left(\frac{(\cos^2 \beta \cos \lambda)^2 + (\sin^2 \beta)^2 + 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \cos \lambda}{(1 - \cos^2 \beta)^2 + 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \cos \lambda} \right)} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{(\cos^2 \beta \cos \lambda)^2 + 1 - 2 \cos^2 \beta + (\sin^2 \beta)^2 + 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \cos \lambda}{2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \cos \lambda} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cos^2 \beta - (\cos^2 \beta \cos \lambda)^2 - (\cos^2 \beta)^2 - 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \cos \lambda}{2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \cos \lambda}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cos^2 \beta - \cos^2 \beta (\cos^2 \beta \cos^2 \lambda + \cos^2 \beta + 2 \sin^2 \beta \cos \lambda)}{2 \sin^2 \beta \cos \lambda}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 \beta (2 - (\cos^2 \beta \cos^2 \lambda + \cos^2 \beta + 2 \sin^2 \beta \cos \lambda))}{2 \sin^2 \beta \cos \lambda}} \\ &= \cos \beta \sqrt{\frac{2 - (\cos^2 \beta \cos^2 \lambda + \cos^2 \beta + 2(1 - \cos^2 \beta) \cos \lambda)}{2(1 - \cos^2 \beta) \cos \lambda}} \\ &= \cos \beta \sqrt{\frac{2 - (\cos^2 \beta \cos^2 \lambda + \cos^2 \beta - 2 \cos^2 \beta \cos \lambda + 2 \cos \lambda)}{2(1 - \cos^2 \beta) \cos \lambda}} \\ &= \cos \beta \sqrt{\frac{2 - (\cos^2 \beta (\cos^2 \lambda + 1 - 2 \cos \lambda) + 2 \cos \lambda)}{2(1 - \cos^2 \beta) \cos \lambda}} \\ &= \cos \beta \sqrt{\frac{2 - 2 \cos \lambda - \cos^2 \beta (\cos^2 \lambda + 1 - 2 \cos \lambda)}{2(1 - \cos^2 \beta) \cos \lambda}} \\ &= \cos \beta \sqrt{\frac{2(1 - \cos \lambda) - \cos^2 \beta (1 - \cos \lambda)^2}{2(1 - \cos^2 \beta) \cos \lambda}} \\ &= \cos \beta \sqrt{\frac{(1 - \cos \lambda)(2 - \cos^2 \beta (1 - \cos \lambda))}{2(1 - \cos^2 \beta) \cos \lambda}} \end{aligned}$$

Dengan demikian

$$\frac{\cos \phi}{\cos \beta} \frac{d}{d\lambda} \cos^{-1}(\cos^2 \beta \cos \lambda + \sin^2 \beta)$$

sama dengan

$$\frac{\cos \phi}{\cos \beta} \frac{\cos^2 \beta \sin \lambda}{\cos \beta \sqrt{(1 - \cos \lambda) \left(\frac{2 - \cos^2 \beta (1 - \cos \lambda)}{\sin \lambda} \right)}}$$

$$= \cos \phi \frac{\sin \lambda}{\sqrt{(1 - \cos \lambda)(2 - \cos^2 \beta (1 - \cos \lambda))}}$$

$$= \cos \phi \frac{\sqrt{\sin^2 \lambda}}{\sqrt{1 - \cos \lambda} \sqrt{2 - \cos^2 \beta (1 - \cos \lambda)}}$$

$$= \cos \phi \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \lambda}}{\sqrt{1 - \cos \lambda} \sqrt{2 - \cos^2 \beta (1 - \cos \lambda)}}$$

$$= \cos \phi \frac{\sqrt{1 + \cos \lambda}}{\sqrt{2 - \cos^2 \beta (1 - \cos \lambda)}} \quad (4.18)$$

Sehingga $f'(\lambda)$ juga dapat dituliskan sebagai

$$f'(\lambda) = \cos \phi - \cos \phi \frac{\sqrt{1 + \cos \lambda}}{\sqrt{2 - \cos^2 \beta (1 - \cos \lambda)}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos \phi \left(1 - \frac{\sqrt{1+\cos \lambda}}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)}} \right) \\
 &= \cos \phi \left(\frac{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)} - \sqrt{1+\cos \lambda}}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)}} \right) \\
 &= \cos \phi \left(\frac{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)} - \sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)} + \sqrt{1+\cos \lambda}}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)}} \right) \\
 &= \frac{\cos \phi}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)}} \frac{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda) - (1+\cos \lambda)}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)}} \\
 &= \frac{\cos \phi}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)}} \frac{1-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda) - \cos \lambda}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)} + \sqrt{1+\cos \lambda}} \\
 &= \frac{\cos \phi}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)}} \frac{(1-\cos \lambda) - \cos^2 \beta(1-\cos \lambda)}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)} + \sqrt{1+\cos \lambda}} \\
 &= \frac{\cos \phi}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)}} \frac{(1-\cos \lambda)(1-\cos^2 \beta)}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)} + \sqrt{1+\cos \lambda}}
 \end{aligned}$$

Maka turunan f terhadap λ dapat dituliskan pula sebagai

$$f'(\lambda) = \frac{\cos \phi}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)}} \frac{(1-\cos \lambda)(1-\cos^2 \beta)}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)} + \sqrt{1+\cos \lambda}} \quad (4.19)$$

Untuk $0 < \beta < \phi < \frac{\pi}{2}$, maka

$$0 < \cos^2 \phi < \cos^2 \beta < 1. \quad (4.20)$$

Sedangkan untuk $0 < \lambda < \pi$, maka

$$2 > 1 - \cos \lambda > 0 \text{ dan } 0 < 1 + \cos \lambda < 2 \quad (4.21)$$

Dari (4.20) dan (4.21) diperoleh pula

$$1 - \cos \lambda > \cos^2 \beta (1 - \cos \lambda) > \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda) > 0. \quad (4.22)$$

Sebagai akibatnya, maka

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 + \cos \lambda} &< \sqrt{2 - \cos^2 \beta (1 - \cos \lambda)} < \\
 \sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)} &< \sqrt{2}
 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Maka dari (4.20) (4.21), dan (4.23) berakibat

$$\frac{\cos \phi}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)}} \frac{(1-\cos \lambda)(1-\cos^2 \beta)}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)} + \sqrt{1+\cos \lambda}} > 0 \quad (4.24)$$

Sehingga dari (4.19) dan (4.24), diketahui

$$f'(\lambda) = \frac{\cos \phi}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)}} \frac{(1-\cos \lambda)(1-\cos^2 \beta)}{\sqrt{2-\cos^2 \beta(1-\cos \lambda)} + \sqrt{1+\cos \lambda}} > 0 \quad (4.25)$$

Karena $f'(\lambda)$ selalu positif, maka f monoton naik pada $0 \leq \lambda \leq \pi$. Oleh karena itu, $f(0) \leq f(\lambda)$ untuk $0 \leq \beta \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Dengan menggunakan (4.17), untuk $\lambda = 0$ diperoleh $f(0) = 0$. Sebagai akibatnya $0 \leq f(\lambda) = S_k(\lambda) - S_r(\lambda)$. Dengan demikian diperoleh hubungan panjang busur S_k dan S_r yaitu

$$S_r(\lambda) \leq S_k(\lambda). \quad (4.26)$$

Analisis Fungsi g

Fungsi g yang bergantung pada λ didefinisikan sebagai $g(\lambda) = S_r(\lambda) - S_b(\lambda)$. Sehingga dari persamaan (4.11) dan (4.16) diperoleh

$$\begin{aligned}
 g(\lambda) &= \frac{\cos \phi}{\cos \beta} \cos^{-1}(\cos^2 \beta \cos \lambda + \sin^2 \beta) \\
 &\quad - \cos^{-1}(\cos^2 \phi \cos \lambda + \sin^2 \phi)
 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Fungsi g kontinu pada $0 \leq \lambda \leq \pi$. Jika g diturunkan terhadap λ pada $0 < \lambda < \pi$, maka dari (4.27) diperoleh

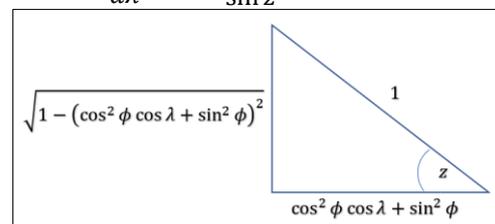
$$\begin{aligned}
 g'(\lambda) &= \frac{\cos \phi}{\cos \beta} \frac{d}{d\lambda} \cos^{-1}(\cos^2 \beta \cos \lambda + \sin^2 \beta) \\
 &\quad - \frac{d}{d\lambda} \cos^{-1}(\cos^2 \phi \cos \lambda + \sin^2 \phi)
 \end{aligned}$$

Misalkan $z = \cos^{-1}(\cos^2 \phi \cos \lambda + \sin^2 \phi)$ maka $\cos z = \cos^2 \phi \cos \lambda + \sin^2 \phi$ yang jika kedua ruas diturunkan terhadap λ maka

$$\frac{d}{d\lambda} \cos z = \frac{d}{d\lambda} (\cos^2 \phi \cos \lambda + \sin^2 \phi)$$

$$\rightarrow -\sin z \frac{dz}{d\lambda} = -\sin \lambda \cos^2 \phi$$

$$\rightarrow \frac{dz}{d\lambda} = \frac{\cos^2 \phi \sin \lambda}{\sin z}$$



Gambar 4.9 Ilustrasi z sebagai sudut

Berdasarkan Gambar 4.9 maka

$$\begin{aligned}
 \sin z &= \sqrt{1 - (\cos^2 \phi \cos \lambda + \sin^2 \phi)^2} \\
 &= \sqrt{1 - ((\cos^2 \phi \cos \lambda)^2 + (\sin^2 \phi)^2 + 2 \sin^2 \phi \cos^2 \beta \cos \lambda)} \\
 &= \sqrt{1 - ((\cos^2 \phi \cos \lambda)^2 + (1 - \cos^2 \phi)^2 + 2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \cos \lambda)} \\
 &= \sqrt{1 - \left(\frac{(\cos^2 \phi \cos \lambda)^2 + 1 - (2 \cos^2 \phi + (\cos^2 \phi)^2) + 2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \cos \lambda}{2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \cos \lambda} \right)} \\
 &= \sqrt{\frac{2 \cos^2 \phi - (\cos^2 \phi \cos \lambda)^2 - (\cos^2 \phi)^2 - 2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \cos \lambda}{2 \cos^2 \phi - \cos^2 \phi (\cos^2 \phi \cos^2 \lambda + \cos^2 \phi + 2 \sin^2 \phi \cos \lambda)}} \\
 &= \sqrt{\frac{\cos^2 \phi (2 - (\cos^2 \phi \cos^2 \lambda + \cos^2 \phi + 2 \sin^2 \phi \cos \lambda))}{\cos^2 \phi (2 - (\cos^2 \phi \cos^2 \lambda + \cos^2 \phi + 2 \sin^2 \phi \cos \lambda))}} \\
 &= \cos \phi \sqrt{\frac{2 - (\cos^2 \phi \cos^2 \lambda + \cos^2 \phi + 2 \sin^2 \phi \cos \lambda)}{\cos^2 \phi + 2(1 - \cos^2 \phi) \cos \lambda}} \\
 &= \cos \phi \sqrt{\frac{2 - (\cos^2 \phi \cos^2 \lambda + \cos^2 \phi - 2 \cos^2 \phi \cos \lambda + 2 \cos \lambda)}{\cos^2 \phi - 2 \cos^2 \phi \cos \lambda + 2 \cos \lambda}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos \phi \sqrt{\frac{2 - (\cos^2 \phi (\cos^2 \lambda + 1 - 2 \cos \lambda))}{1 - 2 \cos \lambda}} \\
 &= \cos \phi \sqrt{\frac{2 - 2 \cos \lambda}{-\cos^2 \phi (\cos^2 \lambda + 1 - 2 \cos \lambda)}} \\
 &= \cos \phi \sqrt{\frac{2(1 - \cos \lambda) - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)^2}{(1 - \cos \lambda)(2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda))}} \\
 &= \cos \phi \sqrt{(1 - \cos \lambda)(2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda))}
 \end{aligned}$$

Dengan

$$\frac{dz}{d\lambda} = \cos \phi \left(\frac{\sqrt{1 + \cos \lambda}}{\sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)}} \right) \quad (4.28)$$

Sehingga dari (4.18) dan (4.28) diperoleh

$$\begin{aligned}
 g'(\lambda) &= \frac{\cos \phi \sqrt{1 + \cos \lambda}}{\sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)}} - \frac{\cos \phi \sqrt{1 + \cos \lambda}}{\sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)}} \\
 &= \cos \phi \sqrt{1 + \cos \lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)}} - \frac{1}{\sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)}} \right) \\
 &= \frac{\cos \phi \sqrt{1 + \cos \lambda} (\sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)} - \sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)})}{\sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)} \sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)}}
 \end{aligned}$$

yakni

$$g'(\lambda) = \frac{\cos \phi \sqrt{1 + \cos \lambda} (\sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)} - \sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)})}{\sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)} \sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)}} \quad (4.29)$$

Dari (4.20), (4.21), dan (4.23) maka dapat diketahui bahwa

$$\frac{\cos \phi \sqrt{1 + \cos \lambda} (\sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)} - \sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)})}{\sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)} \sqrt{2 - \cos^2 \phi (1 - \cos \lambda)}} > 0. \quad (4.30)$$

Dengan demikian dari (4.29) dan (4.30), $g'(\lambda) > 0$ untuk $0 < \lambda < \pi$. Hasil ini menunjukkan bahwa g monoton naik. Kemudian, untuk $0 \leq \lambda \leq \pi$, diperoleh $g(0) \leq g(\lambda)$. Dari (4.27), untuk $\lambda = 0$ diperoleh $g(0) = 0$. Sebagai akibatnya, $0 \leq g(\lambda) = S_r(\lambda) - S_b(\lambda)$ yang mengimplikasikan

$$S_b(\lambda) \leq S_r(\lambda). \quad (4.31)$$

Busur Terpendek

Panjang busur terpendek dari lingkaran yang menghubungkan P dan Q ditentukan dengan melihat hubungan matematis antara S_k , S_r , dan S_b . Dari (4.26) dan (4.31) diperoleh

$$S_b(\lambda) \leq S_r(\lambda) \leq S_k(\lambda) \quad (4.32)$$

Artinya, busur terpendek dari lingkaran yang menghubungkan P dan Q adalah busur lingkaran besar C_b yaitu S_b .

Uraian di atas juga dapat disimpulkan dalam lema berikut:

Lema 4.2.3: Misalkan bumi berbentuk bola sempurna (*perfect sphere*), maka sebarang dua titik di permukaan bumi dapat dilalui oleh tak hingga banyaknya lingkaran di mana busur pada lingkaran besar adalah yang terpendek.

4. Kesimpulan dan Saran

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian di atas maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Dengan bantuan geometri analitik, sebarang dua tempat di permukaan bumi beserta lingkaran-lingkaran yang melalui keduanya dapat dianalisis. Dapat ditemukan bahwa, terdapat tak hingga banyaknya lingkaran yang menghubungkan sebarang dua tempat di permukaan bumi.
2. Fungsi $f(\lambda) = S_k(\lambda) - S_r(\lambda)$ dan $g(\lambda) = S_r(\lambda) - S_b(\lambda)$ sebagaimana didefinisikan pada bab sebelumnya terdiferensialkan pada $I = \{\lambda \mid 0 < \lambda < \pi, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Setelah diselidiki menggunakan teorema kemonotonan fungsi, f dan g ternyata monoton naik sedemikian sehingga untuk setiap $\lambda \in I$ diperoleh hubungan $S_b(\lambda) \leq S_r(\lambda) \leq S_k(\lambda)$ di mana $S_b(\lambda)$, $S_r(\lambda)$, dan $S_k(\lambda)$ menyatakan panjang busur lingkaran besar, lingkaran sedang dan lingkaran kecil. Dengan demikian, busur lingkaran besar yang melalui sebarang dua tempat di permukaan bumi adalah yang terpendek

4.2 Saran

Selama penelitian, penulis menemukan fenomena yang dapat dikaji untuk penelitian lanjutan. Terdapat tak hingga banyaknya lingkaran yang menghubungkan sebarang dua tempat di permukaan bumi sekaligus bidang lingkarannya ditembus oleh sumbu koordinat. Penulis juga mengintuisikan bahwa garis yang melalui pusat bola bumi dan tegak lurus dengan setiap bidang lingkaran yang menghubungkan sebarang dua tempat di permukaan bumi akan menembus bidang lingkaran pada pusat lingkaran. Jika intuisi tersebut dapat ditunjukkan dengan analisis matematika atau dengan sumber bacaan yang relevan, maka koordinat pusat setiap lingkaran yang menghubungkan sebarang tempat di permukaan bumi di mana bidang lingkarannya ditembus oleh sumbu koordinat dapat ditentukan dengan memanfaatkan persamaan garis pada ruang dan persamaan bidang rata. Selain itu, fenomena yang dikaji di atas juga dapat dilakukan dengan menggunakan integral garis.

Ucapan Terima Kasih: Penelitian ini dapat dilaksanakan dengan lancar berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, untuk itu peneliti mengucapkan terima kasih kepada Civitas Akademika Universitas Halu Oleo, Dosen Pembimbing, Tim Penguji dan pihak-pihak lain yang telah memfasilitasi dan membantu berjalannya penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1] R. G. Bartle & D. R. Sherbert (2011). *Introduction to Real Analysis* (4th ed.). John Wiley & Sons.
- [2] A. Baskar. (2021). Simple Single and Multi-Facility Location Models using Great Circle Distance. *ITM Web of Conferences*, 37, 01001.
- [3] U. Bhatti. (2015). *Design Of An Efficient & Weather Resistant Flight Path Module For Guidance Of A Uav* [Thesis, Institute of Space Technology].
- [4] M. Braganza. (n.d.). *Earth Science' 2005 Ed.* Rex Bookstore, Inc.
- [5] H. Cahyono. (2019). *Geometri Analitik Bidang*. UMM Press.
- [6] Darmayanto. (2020). *Penerapan Teorema Kemonotonan Untuk Membuktikan Panjang Busur Lingkaran Besar Lebih Pendek Dari Panjang Busur Lingkaran Kecil Pada Bola Bumi* [Skripsi]. Universitas Halu Oleo.
- [7] U. Force. States. D. of the A., & Department, U. States. N. (1973). *Flying Training: Air Navigation, July 1, 1973*. Department of Defense, Department of the Air Force. <https://books.google.co.id/books?id=Tr5dod-i-F8C>.
- [8] D. Garcia-Castellanos & U. Lombardo. (2007). Poles of inaccessibility: A calculation algorithm for the remotest places on earth. *Scottish Geographical Journal*, 123(3), 227–233.
- [9] V. G. A. Goss. (2013). Application of analytical geometry to the form of gear teeth. *Resonance*, 18, 817–831.
- [10] H. Gunawan. (2016). *Pengantar Analisis Real*. ITB.
- [11] A. In'am. (2022). *Pengantar Geometri*. Bayumedia Publishing.
- [12] R. Larson. & B. H. Edwards. (2009). *Calculus Multivariable*. Cengage Learning.
- [13] W. J. Loftie & K. Greenaway. (1888). *Orient Line Guide: Chapters for Travellers by Sea and by Land: Illustrated*. Sampson Low, Marston, Searle, & Rivington, Limited.
- [14] Z. Lu, Y. Qu, & S. Qiao. (2014). *Geodesy: Introduction to geodetic datum and geodetic systems*. Springer.
- [15] H. Mahmoud & N. Akkari. (2016). Shortest Path Calculation: A Comparative Study for Location-Based Recommender System. *2016 World Symposium on Computer Applications & Research (WSCAR)*, 1–5.
- [16] V. Nastro & U. Tancredi U. (2010). Great circle navigation with vectorial methods. *The Journal of Navigation*, 63(3), 557–563.
- [17] U. C. A. Patrol, (1949). *Aviation Study Manual: Aviation for American Youth: a Text Book Prepared for the Civil Air Patrol Cadet Program and Designed for Use in Secondary Schools*. The Patrol.
- [18] T. Podobnikar. (2012). *Universal Ontology of Geographic Space: Semantic Enrichment for Spatial Data: Semantic Enrichment for Spatial Data*. Information Science Reference.
- [19] *SCHAUM'S: Matematika Universitas Ed. 3.* (n.d.). Erlangga.
- [20] D. M. Y. Sommerville. (2016). *Analytical geometry of three dimensions*. Cambridge University Press.
- [21] J. Stewart. (2011). *Calculus*. Cengage Learning.
- [22] G. W. Still & J. F. Nealon. (2008). *The Case for Using the Spherical Model to Calculate the Interpolated Points in the Connectivity Software Deployment Module*.
- [23] A. Sulistyono, A. Yudhana, S. Sunardi, & R. Aini. (2018). Analisa Perbandingan GPS Google Maps Dan GPS Google Earth Dalam Penentuan Titik Koordinat Breeding Place. *Respati*, 13(3).
- [24] L. Tamásy. (1969). A characteristic property of the sphere. *Pacific Journal of Mathematics*, 29(2), 439–446.
- [25] W. K. Tseng & H. S. Lee, H. S. (2007). The vector function for distance travelled in great circle navigation. *The Journal of Navigation*, 60(1), 158–164.
- [26] K. Umamaheswari, R. K. H. Prasath, B.

- Shruthi, M. Ramya, & S. Nivetha. (2018). A Case Study On Analytical Geometry And Its Applications. *Mirror*, 1(2), 138.
- [27] D. Varberg, E. J. Purcell, & S. E. Rigdon. (2007). *CALCULUS NINTH EDITION* (9th ed.). Pearson International Edition.
- [28] D. K. Yadav. (2017). Exact definition of mathematics. *International Research Journal of Mathematics, Engineering and IT*, 4(1), 34–42.

Diterima tgl. 30 Mei 2024
Direvisi tgl. 29 Juli 2024
Disetujui untuk terbit tgl. 10 Sept. 2024