

Analisis Model Matematika Pada Pengaruh Sistem Imun Tubuh Terhadap Penyebaran Penyakit Covid-19

Febriani¹⁾

¹⁾Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari
Email: febbyanyfebby@gmail.com

Arman^{1a)}, Norma Muhtar^{1b)}, Asrul Sani^{1c)}, Jufra^{1d)} dan Wayan Somayasa^{1e)}

¹⁾Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari
Email: ^{a)}arman@uho.ac.id, ^{b)}norma.muhtar@uho.ac.id, ^{c)}asrul.sani@gmail.com, ^{d)}jufralect@gmail.com

ABSTRAK

Corona Virus Disease-2019 adalah suatu penyakit yang disebabkan oleh coronavirus yang menyerang saluran pernafasan. Penyakit COVID-19 dapat menyebar melalui tetesan kecil (Droplet) dari hidung atau mulut pada saat bersin atau batuk. Penelitian ini bertujuan untuk Mengetahui perilaku selesaian dan analisis model matematika pada pengaruh sistem imun tubuh terhadap penyebaran penyakit COVID-19. Dari hasil analisis model SEIRS diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Analisis ekuilibrium bebas penyakit menggunakan linierisasi di sekitar titik ekuilibrium. Untuk mencari bilangan reproduksi dasar juga dilakukan dengan metode matriks generasi selanjutnya. Hasilnya, titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ artinya penyakit akan menghilang seiring berjalannya waktu, sedangkan titik ekuilibrium endemik bersifat stabil jika $R_0 > 1$ artinya sistem belum terbebas dari penyakit dan masih terdapat penyakit pada populasi tersebut. Simulasi numerik model untuk penyakit COVID-19 yang dilakukan sejalan dengan analisis perilaku model.

Kata Kunci: COVID-19, Model SEIRS, Titik Ekuilibrium, Bilangan Reproduksi Dasar.

ABSTRACT

Corona Virus Disease-2019 is a disease caused by a coronavirus that affects the respiratory system. COVID-19 can spread through small droplets from the nose or mouth when sneezing or coughing. This research aims to determine the solution behavior and analyze a mathematical model of the influence of the immune system on the spread of COVID-19. From the analysis of the SEIRS model, two equilibrium points are obtained: the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. Analysis of the disease-free equilibrium is carried out by linearization around the equilibrium point. To find the basic reproduction number, it is also calculated using the next-generation matrix method. The results show that the disease-free equilibrium point is asymptotically stable if $R_0 < 1$, meaning the disease will disappear over time, while the endemic equilibrium point is stable if $R_0 > 1$, indicating that the system is not free from the disease, and the disease still exists in the population. Numerical simulations of the COVID-19 model are performed in line with the analysis of the model's behavior.

Keywords: COVID-19, SEIRS Model, Equilibrium Points, Basic Reproduction Number.

1. Pendahuluan

Menurut [1], pada akhir Desember tahun 2019 di kota Wohan China, muncul sebuah wabah virus baru yang dikenal sebagai virus COVID-19 yang disebabkan oleh SARS-CoV-2. Pada tanggal 11 Maret 2020 WHO mengumumkan COVID-19 telah menginfeksi lebih dari 118.000 orang, menyebar di 114 negara dan mengakibatkan 4.291 orang meninggal. Atas dasar tersebut WHO menetapkan pandemi global untuk COVID-19 yang artinya COVID-19 telah menyebar luas di seluruh dunia. Indonesia melaporkan kasus pertama, kasus COVID-19 pada tanggal 2 Maret 2020. [2]

Virus corona merupakan kumpulan virus dari *sub Family Orthocoronavirinae*. Virus ini tidak hanya

bisa menimbulkan penyakit kepada manusia tetapi juga kepada hewan [3] *Corona Virus Disease-2019* adalah suatu penyakit yang disebabkan oleh coronavirus yang menyerang saluran pernafasan. Coronavirus yang diketahui menyebabkan penyakit yang dapat menimbulkan gejala berat seperti *Middle East Respiratory Syndrome* (MERS), Sindrom Pernapasan Akut Berat / *Severe Acute Respiratory Syndrome* (SARS) dan ada yang tanpa gejala. [4]

Gejala utama orang yang terinfeksi COVID-19 umumnya terjadi keluhan pada sistem pernapasan sehingga berpengaruh pada suhu tubuh, beberapa gejala klinis yang dialami oleh orang yang terinfeksi akan mengalami demam, batuk pilek, gangguan pernapasan, sakit tenggorokan serta badan terasa letih

dan lesu. Penularan virus COVID-19 dapat melalui tiga cara, yang pertama melalui droplet (percikan cairan atau lendir yang keluar dari mulut dan hidung) pada saat berbicara, batuk dan bersin yang berasal dari saluran pernafasan. Kedua melalui kotak langsung dengan orang yang terinfeksi. Ketiga melalui kontak dengan permukaan atau benda yang terkontaminasi oleh virus. [5]

Pencegahan penyebaran infeksi COVID-19 dengan melakukan beberapa hal diantaranya adalah dengan cara rajin mencuci tangan dengan sabun dan air mengalir atau menggunakan handsanitizer (antiseptik), menjaga jarak minimal 1 meter dari orang yang batuk atau yang sedang bersin, tidak menyentuh hidung, mulut atau mata sebelum mencuci tangan dengan sabun, memastikan bahwa orang di sekitar menerapkan batuk atau bersin sesuai dengan etika, melakukan isolasi diri jika merasa badan atau tubuh kurang sehat, selalu mengikuti informasi terbaru terkait cara pencegahan COVID-19 [6]

Mekanisme pertahanan tubuh dapat terjadi melalui serangkaian mekanisme interaksi sistem imunitas bawaan (*innate*) dan imunitas adaptif. Sistem imun mengenali pathogen penyerang dengan mengidentifikasi urutan asam amino antigen, dari proses identifikasi ini sistem imun menjalankan sistem yang melibatkan berbagai komponen untuk bekerja secara sinergis melawan dan mengeliminasi pathogen. sistem imun merupakan pasukan utama yang berperan sangat penting dimana keberhasilan kerjanya akan sangat mempengaruhi terjadi tidaknya infeksi penyebab penyakit termasuk COVID-19 pada seseorang [7]

Model matematika adalah suatu alat yang dapat berperan dalam mempelajari penyebaran penyakit, biasa disebut model matematika epidemiologi. Model klasik tentang penyebaran penyakit telah dirumuskan oleh Kermack pada tahun 1927, yang dikenal dengan model SIR (*Infected, Susceptible, and Recovered*). Pada model SIR, populasi total dibagi menjadi 3 subpopulasi, yaitu *Susceptible* yang menyatakan jumlah individu sehat tetapi rentan terinfeksi penyakit, *Infected* yang menyatakan jumlah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit, dan *Recovered* yang menyatakan subpopulasi yang sembuh. Beberapa penyakit memiliki periode *laten* (masa inkubasi), yaitu selang waktu individu sehat menjadi individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit. Dengan penambahan tersebut, model SIR dikembangkan dan menjadi model SEIR. Oleh karena itu, penyebaran COVID-19 dapat dikaji dengan menggunakan model SEIR. [8]

Penelitian ini akan membahas mengenai pengaruh sistem imun tubuh terhadap penyebaran penyakit COVID-19 pada populasi manusia. Model matematika penyebaran penyakit sudah banyak diteliti salah satunya model matematika penyebaran

penyakit Covid menggunakan model SIQRD oleh Fauziah, *Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Covid-19 dengan Menggunakan Model SIRS dan Analisis Dinamik Model SIR pada kasus penyebaran penyakit corona COVID-19* oleh sari dkk.

Penelitian ini menggunakan *Software* Maple yang sering digunakan dalam pemodelan. Maple digunakan karena memiliki kelebihan dan bahasa yang digunakan relatif mudah untuk dipahami bagi peneliti, untuk simulasi model penyexbaran penyakit COVID-19 akan menggunakan Maple 18.

2. Metode

Penelitian ini merupakan penelitian dengan metode kepustakaan yang dilakukan pada bulan Mei sampai bulan September 2023 di Laboratorium Analisis, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari.

Penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah, yaitu: (1) melakukan studi literatur berupa buku dan jurnal terkait masalah yang akan diangkat, (2) Membuat asumsi berdasarkan model matematika yang menunjang masalah dalam penelitian, (3) Kontruksi model berdasarkan asumsi yang telah dibuat (4) Menentukan titik ekuilibrium dari sistem dan model yang dibentuk (5) Menganalisis kestabilan titik ekuilibrium dengan mencari titik ekuilibrium, matriks Jacobian, mencari nilai eigen, dan mengidentifikasi sifat kestabilan dari nilai eigen (6) Simulasi hasil dengan menggunakan *software* (7) Menginterpretasikan hasil analisis yang diperoleh dan penarikan kesimpulan.

3. Hasil dan Pembahasan

a. Asumsi Model

Susceptible (S) bertambah karena laju kelahiran dari populasi (μN) serta laju perpindahan populasi manusia sembuh *Recovered* menjadi populasi manusia rentan *Susceptible* (S) dengan laju sebesar (γ), populasi *Susceptible* (S) berkurang karena berinteraksi dengan populasi *Infected* (I) sehingga menjadi populasi *Exposed* (E) dengan laju perubahan sebesar β dan kematian alami dari populasi (S) sebesar μ_1 . Pada populasi *Eksposed* (E) bertambah dikarenakan populasi S berinteraksi dengan populasi *Infected* (I) dengan laju sebesar β , pengurangan populasi *exposed* berpindah menjadi populasi *Infected* (I) dengan laju sebesar η dan terjadi kematian alami pada populasi *Eksposed* (E). Pada jumlah populasi *Infected* (I) bertambah dikarenakan populasi E berpindah menjadi populasi *Infected* (I) dengan laju sebesar η . Pengurangan populasi *Infected* berpindah menjadi populasi *Recovered* (R) dengan laju sebesar θ dan kematian akibat terinfeksi penyakit COVID-19 terhadap populasi I sebesar μ_1 dan kematian alami yang dialami oleh populasi I dengan laju sebesar μ_2 .

Sedangkan pada *Recovered* (R) mengalami penambahan jumlah populasi dikarenakan untuk kesembuhan populasi I dengan laju sebesar θ . Kemudian pengurangan pada jumlah subpopulasi *Recovered* dikarenakan laju perpindahan populasi manusia sembuh menjadi populasi manusia rentan sebesar γ dan kematian alami dari R dengan laju sebesar μ_1 .

Model matematika pengaruh sistem imun tubuh terhadap penyebaran penyakit COVID-19 menggunakan model matematika *SEIR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*). Berikut beberapa asumsi-asumsi yang digunakan dalam pembentukan model yaitu sebagai berikut:

- 1) Setiap individu yang lahir akan dimasukkan ke dalam populasi manusia rentan (S)
- 2) Terdapat masa inkubasi (E) (periode laten) pada proses penularan penyakit COVID-19
- 3) Laju kematian alami terdapat pada setiap kompartemen
- 4) Laju kematian yang disebabkan oleh penyakit COVID-19 hanya terdapat pada populasi terinfeksi
- 5) Individu yang sudah sembuh belum tentu memiliki kekebalan terhadap penyakit COVID-19 sehingga individu yang sudah sembuh dapat rentan kembali.

b. Variabel dan Parameter

Variabel yang digunakan dalam model *SEIRS* pada penyebaran penyakit COVID-19 disajikan pada tabel dibawah ini:

Tabel 1. Daftar variabel-variabel

No.	Variabel	Definisi	Satuan
1	$N(t)$	Total populasi individu pada waktu ke-t	Individu
2	$S(t)$	Jumlah individu yang rentan terhadap penyakit COVID-19 pada waktu ke-t	Individu
3	$E(t)$	Jumlah individu yang telah tertular atau <i>Exposed</i> terhadap penyakit COVID-19 pada waktu ke-t	Individu
4	$I(t)$	Jumlah individu yang terinfeksi penyakit COVID-19 pada waktu ke-t	Individu
5	$R(t)$	Jumlah individu yang sembuh dari penyakit COVID-19 pada waktu ke-t	Individu

Parameter yang digunakan dalam pembuatan model pengaruh sistem imun tubuh terhadap

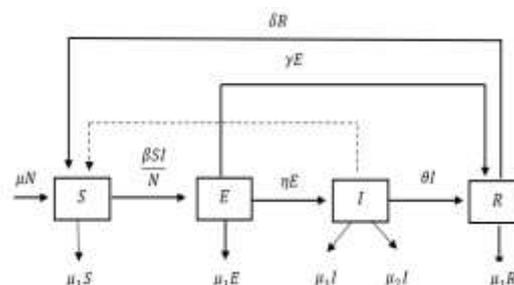
penyebaran penyakit COVID-19 ini adalah sebagai berikut:

Tabel 2. Daftar parameter-parameter

No.	Parameter	Definisi	Syarat
1	μ	Tingkat kelahiran pada manusia	$\mu > 0$
2	β	Tingkat penularan penyakit COVID-19 per sekali kontak	$\beta > 0$
3	μ_1	Laju kematian secara alami	$\mu_1 > 0$
4	μ_2	Laju kematian disebabkan penyakit COVID-19	$\mu_2 > 0$
5	η	Laju perpindahan populasi manusia yang terpapar menjadi populasi manusia yang terinfeksi	$\eta > 0$
6	θ	Laju perpindahan populasi manusia terinfeksi menjadi populasi manusia sembuh	$\theta > 0$
7	γ	Laju sistem imun terhadap tubuh manusia	$\gamma > 0$
8	δ	Laju perpindahan populasi manusia sembuh menjadi populasi manusia rentan kembali	$\delta > 0$

c. Model Matematika *SEIRS*

Skema untuk model matematika pengaruh sistem imun tubuh terhadap penyebaran penyakit COVID-19 adalah sebagai berikut:



Gambar 1. Skema model matematika *SEIRS*

Berdasarkan asumsi dan skema model maka diperoleh sistem persamaan diferensial pada model matematika adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu N + \delta R - \left(\frac{\beta I}{N} + \mu_1\right) S \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (\eta + \mu_1 + \gamma) E \\ \frac{dI}{dt} &= \eta E - (\theta + \mu_1 + \mu_2) I \\ \frac{dR}{dt} &= \theta I + \gamma E - (\mu_1 + \delta) R \end{aligned} \quad (1)$$

d. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium (S, E, I, R, S) adalah titik ekuilibrium dari Persamaan (1) jika memenuhi persamaan $\frac{ds}{dt} = 0, \frac{de}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0$ dan $\frac{dr}{dt} = 0$. Dari persamaan (1) diperoleh 2 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0)

$$E_0 = (S, E, I, R) = \left(\frac{\mu N}{\mu_1}, 0, 0, 0\right) \quad (2)$$

dan titik ekuilibrium endemik (E_1)

$$E_1 = (S, E, I, R) = (S^*, E^*, I^*, R^*) \quad (3)$$

dengan

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{1}{2} \left(\frac{N}{\beta \eta}\right) (\eta \mu_1 + \eta \mu_2 + \eta \theta + \gamma \mu_1 + \gamma \mu_2 + \gamma \theta \\ &\quad + \mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \theta), \\ E^* &= -((\theta + \mu_1 + \mu_2) N (-\beta \delta \eta \mu + \beta \eta \mu \mu_1 + \delta \eta \mu_1^2 \\ &\quad + \delta \eta \mu_1 \mu_2 + \delta \eta \mu_1 \theta + \delta \gamma \mu_1^2 \\ &\quad + \delta \gamma \mu_1 \mu_2 + \delta \gamma \mu_1 \theta + \delta \mu_1^3 \\ &\quad + \delta \mu_1^2 \mu_2 + \delta \mu_1^2 \theta + \eta \mu_1^3 + \eta \mu_1^2 \mu_2 \\ &\quad + \eta \mu_1^2 \theta + \gamma \mu_1^3 + \gamma \mu_1^2 \mu_2 + \gamma \mu_1^2 \theta \\ &\quad + \mu_1^4 + \mu_1^3 \mu_2 + \mu_1^3 \theta)) \\ &\quad / (\beta (\delta \eta \mu_1 + \delta \eta \mu_2 + \delta \mu_1^2 + \delta \mu_1 \mu_2 \\ &\quad + \delta \mu_1 \theta + \eta \mu_1^2 + \eta \mu_1 \mu_2 + \eta \mu_1 \theta \\ &\quad + \gamma \mu_1^2 + \gamma \mu_1 \mu_2 + \gamma \mu_1 \theta + \mu_1^3 \\ &\quad + \mu_1^2 \mu_2 + \mu_1^2 \theta) \eta), \\ I^* &= -(N (-\beta \delta \eta \mu - \beta \eta \mu \mu_1 + \delta \eta \mu_1^2 + \delta \eta \mu_1 \mu_2 \\ &\quad + \delta \eta \mu_1 \theta + \delta \gamma \mu_1^2 + \delta \gamma \mu_1 \mu_2 \\ &\quad + \delta \gamma \mu_1 \theta + \delta \mu_1^3 + \delta \mu_1^2 \mu_2 + \delta \mu_1^2 \theta \\ &\quad + \eta \mu_1^3 + \eta \mu_1^2 \mu_2 + \eta \mu_1^2 \theta + \gamma \mu_1^3 \\ &\quad + \gamma \mu_1^2 \mu_2 + \gamma \mu_1^2 \theta + \mu_1^4 + \mu_1^3 \\ &\quad + \mu_1^3 \mu_2 + \mu_1^3 \theta)) \\ &\quad / (\beta (\delta \eta \mu_1 + \delta \eta \mu_2 + \delta \mu_1^2 + \delta \mu_1 \mu_2 \\ &\quad + \delta \mu_1 \theta + \eta \mu_1^2 + \eta \mu_1 \mu_2 + \eta \mu_1 \theta \\ &\quad + \gamma \mu_1^2 + \gamma \mu_1 \mu_2 + \gamma \mu_1 \theta + \mu_1^3 \\ &\quad + \mu_1^2 \mu_2 + \mu_1^2 \theta)), \\ R^* &= -((\eta \theta + \gamma \mu_1 + \gamma \mu_2 + \gamma \theta) (-\beta \eta \mu + \eta \mu_1^2 \\ &\quad + \eta \mu_1 \mu_2 + \eta \mu_1 \theta + \gamma \mu_1^2 + \gamma \mu_1 \mu_2 \\ &\quad + \gamma \mu_1 \theta + \mu_1^3 + \mu_1^2 \mu_2 + \mu_1^2 \theta) N) \\ &\quad / (\eta \beta (\delta \eta \mu_1 + \delta \eta \mu_2 + \delta \mu_1^2 \\ &\quad + \delta \mu_1 \mu_2 + \delta \mu_1 \theta + \eta \mu_1^2 + \eta \mu_1 \mu_2 \\ &\quad + \eta \mu_1 \theta + \gamma \mu_1^2 + \gamma \mu_1 \mu_2 + \gamma \mu_1 \theta \\ &\quad + \mu_1^3 + \mu_1^2 \mu_2 + \mu_1^2 \theta)). \end{aligned}$$

e. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) dari sistem dengan menggunakan matriks selanjutnya (*Next Generation Matrix*). Matriks generasi selanjutnya dapat diperoleh dari persamaan sub sistem terinfeksi dengan cara sebagai berikut:

1. Mengambil persamaan-persamaan yang menggambarkan kasus terinfeksi dan perubahan dalam kompartemen infeksi dari sistem disebut sub sistem terinfeksi. Sub sistem yang terinfeksi pada model ini adalah E dan I .
2. Lakukan pelinieran terhadap sub sistem terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Maka diperoleh matriks Jacobian dari persamaan $\frac{dE}{dt}$ dan $\frac{dI}{dt}$.

dengan $f_2 = \frac{\beta SI}{N} - (\eta + \mu_1 + \gamma) E$
 $f_3 = \eta E - (\theta + \mu_1 + \mu_2) I$, maka

$$J_{(E,I)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} \\ \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \left(\frac{\beta SI}{N} - (\eta + \mu_1 + \gamma) E\right)}{\partial E} & \frac{\partial \left(\frac{\beta SI}{N} - (\eta + \mu_1 + \gamma) E\right)}{\partial I} \\ \frac{\partial (\eta E - (\theta + \mu_1 + \mu_2) I)}{\partial E} & \frac{\partial (\eta E - (\theta + \mu_1 + \mu_2) I)}{\partial I} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -\eta - \mu_1 - \gamma & \frac{\beta S}{N} \\ \eta & -\mu_1 - \mu_2 - \theta \end{bmatrix}$$

$$J_{(E_1)} = \begin{bmatrix} -\eta - \mu_1 - \gamma & \frac{\beta \mu}{\mu_1} \\ \eta & -\mu_1 - \mu_2 - \theta \end{bmatrix}$$

3. Dekomposisi matriks Jacobian (J) menjadi $J = F - V$, dengan F matriks transisi dan V matriks transisi

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta \mu}{\mu_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \eta + \mu_1 + \gamma & 0 \\ -\eta & \theta + \mu_1 + \mu_2 \end{bmatrix}$$

Hitung V^{-1}

$$V^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\eta + \mu_1 + \gamma)(\theta + \mu_1 + \mu_2) - (0)(-\eta)}$$

$$\begin{bmatrix} \theta + \mu_1 + \mu_2 & 0 \\ -\eta & \eta + \mu_1 + \gamma \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta + \mu_1 + \gamma} & 0 \\ \frac{\eta}{(\eta + \mu_1 + \gamma)(\theta + \mu_1 + \mu_2)} & \frac{1}{\theta + \mu_1 + \mu_2} \end{bmatrix}$$

4. Hitung R_0 dengan $R_0 = \rho(FV^{-1})$

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \beta\mu \\ \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \eta + \mu_1 + \gamma & 1 \\ \eta & \theta + \mu_1 + \mu_2 \\ (\eta + \mu_1 + \gamma)(\theta + \mu_1 + \mu_2) & \theta + \mu_1 + \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \beta\mu\eta & \beta\mu \\ \mu_1(\eta + \mu_1 + \gamma)(\theta + \mu_1 + \mu_2) & \mu_1(\theta + \mu_1 + \mu_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen matriks (T) diperoleh dari persamaan berikut

$$\det|\lambda I - FV^{-1}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} \beta\mu\eta & \beta\mu \\ \mu_1(\eta + \mu_1 + \gamma)(\theta + \mu_1 + \mu_2) & \mu_1(\theta + \mu_1 + \mu_2) \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - \frac{\beta\mu\eta}{\mu_1(\eta + \mu_1 + \gamma)(\theta + \mu_1 + \mu_2)} & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{\beta\mu\eta}{\mu_1(\eta + \mu_1 + \gamma)(\theta + \mu_1 + \mu_2)} + \lambda \right) \lambda$$

Sehingga diperoleh

$$\lambda_1 = \beta\mu\eta / (\mu_1(\eta\mu_1 + \eta\mu_2 + \eta\theta + \gamma\mu_1 + \gamma\mu_2 + \gamma\theta + \mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\theta)),$$

$$\lambda_2 = 0$$

Karena bilangan reproduksi dasar diperoleh dari nilai eigen terbesar, sehingga diperoleh

$$R_0 = \beta\mu\eta / (\mu_1(\eta\mu_1 + \eta\mu_2 + \eta\theta + \gamma\mu_1 + \gamma\mu_2 + \gamma\theta + \mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\theta)) \quad (4)$$

f. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Analisis kestabilan dilakukan dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh melalui metode Linierisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan. Matriks Jacobian dari Sistem (1) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$J_{(E)} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I}{N} - \mu_1 & 0 & -\frac{\beta S}{N} & 0 \\ \frac{\beta I}{N} & -\eta - \mu_1 - \gamma & \frac{\beta S}{N} & 0 \\ 0 & \eta & -\mu_1 - \mu_2 - \theta & 0 \\ 0 & \gamma & \theta & -\mu_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

a. Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dapat diperoleh dengan menyubstitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (\frac{\mu N}{\mu_1}, 0, 0, 0)$ ke matriks Jacobian $J_{(E)}$ sehingga diperoleh:

$$J_{(E_0)} = \begin{bmatrix} -\mu_1 & 0 & -\frac{\beta\mu}{\mu_1} & \gamma \\ 0 & -\eta - \mu_1 - \gamma & \frac{\beta\mu}{\mu_1} & 0 \\ 0 & \eta & -\mu_1 - \mu_2 - \theta & 0 \\ 0 & \gamma & \theta & -\mu_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Dengan menggunakan bantuan *Software Maple 18*, sehingga diperoleh nilai eigen adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\mu_1,$$

$$\lambda_2 = -\delta - \mu_1,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_1} \left(-\eta\mu_1 - \gamma\mu_1 - 2\mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\theta + (4\beta\eta\mu\mu_1 + \eta^2\mu_1^2 + 2\eta\gamma\mu_1^2 - 2\eta\mu_1^2\mu_2 - 2\eta\mu_1^2\theta + \gamma^2\mu_1^2 - 2\gamma\mu_1^2\mu_2 - 2\gamma\mu_1^2\theta + \mu_1^2\mu_2^2 + 2\mu_1^2\mu_2\theta + \mu_1^2\theta^2)^{\frac{1}{2}} \right),$$

$$\lambda_4 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_1} \left(-\eta\mu_1 - \gamma\mu_1 - 2\mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\theta + (4\beta\eta\mu\mu_1 + \eta^2\mu_1^2 + 2\eta\gamma\mu_1^2 - 2\eta\mu_1^2\mu_2 - 2\eta\mu_1^2\theta + \gamma^2\mu_1^2 - 2\gamma\mu_1^2\mu_2 - 2\gamma\mu_1^2\theta + \mu_1^2\mu_2^2 + 2\mu_1^2\mu_2\theta + \mu_1^2\theta^2)^{\frac{1}{2}} \right),$$

Jika ambang batas $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit dikatakan stabil asimtotik lokal.

Maka nilai eigen matriks pada Persamaan **Error! Reference source not found.** dari matriks diperoleh empat nilai eigen dimana untuk λ_1, λ_2 dan λ_4 bernilai negatif serta untuk λ_3 bernilai negatif jika ambang batas $R_0 < 1$ sehingga terbukti jika ambang batas $R_0 < 1$ nilai eigen dari titik ekuilibrium E_0 bernilai negatif yang artinya titik ekuilibrium bersifat stabil asimtotik lokal.

b. Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Kestabilan titik ekuilibrium endemik dari sistem (1) dapat ditentukan dengan menyubstitusikan titik ekuilibrium endemik ke matriks Jacobian. Selanjutnya untuk mencari nilai eigen (*eigen value*) matriks Jacobian pada titik ekuilibrium endemik akan dihitung secara numerik.

g. Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan menggunakan bantuan *Software Maple 18* dengan memberikan nilai untuk masing-masing parameter. Simulasi dilakukan untuk menguji teori kestabilan yang telah diperoleh.

a. Nilai-Nilai Parameter

Adapun nilai-nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Tabel 3. Nilai-nilai parameter penyakit COVID-19

Parameter	Nilai
N	1000
μ	0,0125
μ_1	0,007

μ_2	0,0075
β	0,3
η	0,07
θ	0,48
δ	0,03
γ	0,005

b. Hasil Simulasi

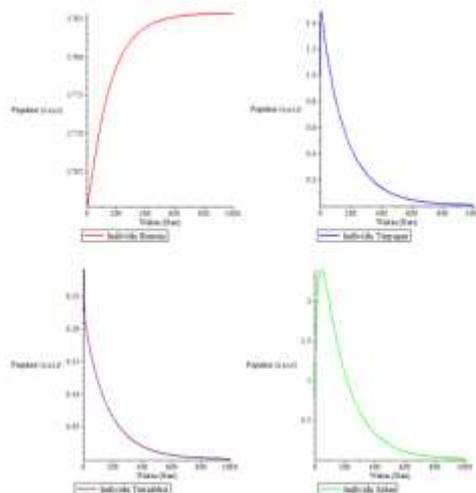
Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3 diperoleh bilangan reproduksi dasar dari Persamaan (1) adalah $R_0 = 0,9213861588$. Maka diperoleh titik ekuilibrium dan nilai eigen bebas penyakit COVID-19 menggunakan *Software Maple 18* adalah sebagai berikut:

Tabel 4. Sifat kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit

Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit	Nilai Eigen
$E_0 = (s, e, i, r)$	$\lambda_1 = -0,00700$
$= \left(\frac{\mu N}{\mu_1}, 0, 0, 0 \right)$	$\lambda_2 = -0,03700$
$= (1785,714286,0,0,0)$	$\lambda_3 = -0,57278$
	$\lambda_4 = -0,00569$

Dari hasil perhitungan di atas, maka dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik saat $R < 1$.

Hasil simulasi di titik ekuilibrium bebas penyakit pada model SEIRS pada penyebaran penyakit COVID-19 dengan bantuan *Software Maple 18* berdasarkan sifat kestabilan pada Tabel 4 dan simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan nilai awal $S = 1760,712, E = 0,997, I = 0,7500, R = 0,789$.



Gambar 2. Grafik titik ekuilibrium bebas penyakit

Pada grafik di atas menunjukkan laju perubahan pada titik ekuilibrium bebas penyakit dengan $R_0 < 1$, dapat dilihat pada individu rentan mengalami kenaikan kemudian bergerak stabil hingga menuju titik ekuilibrium yaitu titik 1785 yang diakibatkan oleh adanya interaksi dengan individu terinfeksi maka sebagian dari individu rentan terpapar oleh penyakit

dimana $\beta = 0,3$ dan adanya kematian alami pada manusia $\mu_1 = 0,007$ serta kematian disebabkan oleh penyakit $\mu_2 = 0,0075$. Pada individu terpapar terjadi peningkatan namun pada hari ke-50 jumlah individu terpapar mengalami penurunan jumlah populasi dan stabil menuju titik ekuilibrium karena memiliki sistem imun yang cukup. Individu terinfeksi terjadi peningkatan namun pada hari ke-70 jumlah individu terinfeksi mengalami penurunan jumlah populasi dan stabil menuju titik ekuilibrium karena pada individu terinfeksi terjadi kematian secara alami dan disebabkan oleh penyakit. Sedangkan pada individu sehat mengalami kenaikan hal ini dikarenakan adanya sebagian individu terinfeksi yang melakukan pengobatan.

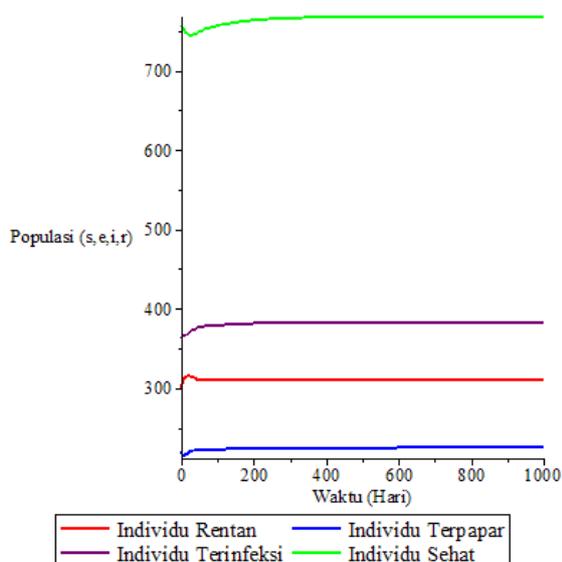
Simulasi numerik titik ekuilibrium endemik untuk $R > 1$. Jika nilai-nilai parameter diperkecil menjadi $\eta = 0,14, \theta = 0,06$ dan $\gamma = 0,008$. Sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar dari Sistem (1) adalah $R_0 = 5,774107673$. Perhitungan titik ekuilibrium dan nilai eigen menggunakan bantuan *Software Maple 18* dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 5. Sifat kestabilan titik ekuilibrium endemik

Titik Ekuilibrium Endemik	Nilai Eigen
$E_1 = (s, e, i, r)$	$\lambda_1 = -0,27811$
$= (309,262;$	$\lambda_2 = -0,05332$
$224,582;$	$+ 0,070711$
$382,919;$	$\lambda_3 = -0,05332$
$767,631)$	$- 0,070711$
	$\lambda_4 = -0,00908$

Dari hasil perhitungan di atas, sehingga dapat disimpulkan bahwa apabila $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium bersifat stabil.

Hasil simulasi di titik ekuilibrium endemik pada model SEIRS pada penyebaran penyakit COVID-19 dengan bantuan *Software Maple 18* berdasarkan sifat kestabilan pada Tabel 5 dan simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan nilai awal $S = 229,262; E = 220,582; I = 362,919; R = 756,631$.



Gambar 3. Grafik titik ekuilibrium endemik

Pada Gambar 3 menunjukkan bahwa populasi dari individu rentan mengalami penurunan kemudian meningkat menuju titik ekuilibrium. Hal ini disebabkan adanya interaksi dengan individu terinfeksi sehingga sebagian dari individu rentan terpapar oleh penyakit dan adanya kematian pada manusia. Pada individu terpapar dan terinfeksi terjadi penurunan menuju titik ekuilibrium dan stabil di titik tersebut. Selanjutnya untuk individu sehat mengalami peningkatan menuju titik ekuilibrium dan stabil di titik tersebut yang disebabkan adanya pengaruh sistem imun yang ada pada individu.

Sehingga untuk kondisi $R_0 > 1$ titik ekuilibrium endemik bersifat stabil, hal ini menunjukkan bahwa sistem belum terbebas dari penyakit dan masih terdapat penyakit pada populasi tersebut.

4. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah ditetapkan pada penelitian ini, maka dapat di tarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Diperoleh model *SEIRS* penyebaran penyakit COVID-19

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu N + \delta R - \left(\frac{\beta I}{N} + \mu_1\right) S \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (\eta + \mu_1 + \gamma) E \\ \frac{dI}{dt} &= \eta E - (\theta + \mu_1 + \mu_2) I \\ \frac{dR}{dt} &= \theta I + \gamma E - (\mu_1 + \delta) R \end{aligned}$$

2. Terdapat dua titik ekuilibrium yang diperoleh dari model *SEIRS* penyebaran penyakit COVID-19 adalah:

- a. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

$$E_0 = (S, E, I, R) = \left(\frac{\mu N}{\mu_1}, 0, 0, 0\right)$$

- b. Titik Ekuilibrium Endemik

$$E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$$

$$S^* = \frac{N(\eta\mu_1 + \eta\mu_2 + \eta\theta + \gamma\mu_1 + \gamma\mu_2 + \gamma\theta + \mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\theta)}{\beta\eta}$$

$$E^* = -\left((\theta + \mu_1 + \mu_2)N(-\beta\delta\eta\mu + \beta\eta\mu\mu_1 + \delta\eta\mu_1^2 + \delta\eta\mu_1\mu_2 + \delta\eta\mu_1\theta + \delta\gamma\mu_1^2 + \delta\gamma\mu_1\mu_2 + \delta\gamma\mu_1\theta + \delta\mu_1^3 + \delta\mu_1^2\mu_2 + \delta\mu_1^2\theta + \eta\mu_1^3 + \eta\mu_1^2\mu_2 + \eta\mu_1^2\theta + \gamma\mu_1^3 + \gamma\mu_1^2\mu_2 + \gamma\mu_1^2\theta + \mu_1^4 + \mu_1^3\mu_2 + \mu_1^3\theta)\right) / (\beta(\delta\eta\mu_1 + \delta\eta\mu_2 + \delta\mu_1^2 + \delta\mu_1\mu_2 + \delta\mu_1\theta + \eta\mu_1^2 + \eta\mu_1\mu_2 + \eta\mu_1\theta + \gamma\mu_1^2 + \gamma\mu_1\mu_2 + \gamma\mu_1\theta + \mu_1^3 + \mu_1^2\mu_2 + \mu_1^2\theta)\eta),$$

$$I^* = -\left(N(-\beta\delta\eta\mu - \beta\eta\mu\mu_1 + \delta\eta\mu_1^2 + \delta\eta\mu_1\mu_2 + \delta\eta\mu_1\theta + \delta\gamma\mu_1^2 + \delta\gamma\mu_1\mu_2 + \delta\gamma\mu_1\theta + \delta\mu_1^3 + \delta\mu_1^2\mu_2 + \delta\mu_1^2\theta + \eta\mu_1^3 + \eta\mu_1^2\mu_2 + \eta\mu_1^2\theta + \gamma\mu_1^3 + \gamma\mu_1^2\mu_2 + \gamma\mu_1^2\theta + \mu_1^4 + \mu_1^3\mu_2 + \mu_1^3\theta)\right) / (\beta(\delta\eta\mu_1 + \delta\eta\mu_2 + \delta\mu_1^2 + \delta\mu_1\mu_2 + \delta\mu_1\theta + \eta\mu_1^2 + \eta\mu_1\mu_2 + \eta\mu_1\theta + \gamma\mu_1^2 + \gamma\mu_1\mu_2 + \gamma\mu_1\theta + \mu_1^3 + \mu_1^2\mu_2 + \mu_1^2\theta)),$$

$$R^* = -\left((\eta\theta + \gamma\mu_1 + \gamma\mu_2 + \gamma\theta)(-\beta\eta\mu + \eta\mu_1^2 + \eta\mu_1\mu_2 + \eta\mu_1\theta + \gamma\mu_1^2 + \gamma\mu_1\mu_2 + \gamma\mu_1\theta + \mu_1^3 + \mu_1^2\mu_2 + \mu_1^2\theta)N\right) / (\eta\beta(\delta\eta\mu_1 + \delta\eta\mu_2 + \delta\mu_1^2 + \delta\mu_1\mu_2 + \delta\mu_1\theta + \eta\mu_1^2 + \eta\mu_1\mu_2 + \eta\mu_1\theta + \gamma\mu_1^2 + \gamma\mu_1\mu_2 + \gamma\mu_1\theta + \mu_1^3 + \mu_1^2\mu_2 + \mu_1^2\theta)).$$

Sementara itu, Pada penelitian ini membahas tentang analisis model matematika pada pengaruh sistem imun tubuh terhadap penyebaran penyakit COVID-19. Disarankan untuk penelitian selanjutnya mengembangkan model matematika dengan menambahkan parameter-parameter baru.

Ucapan Terima Kasih: Saya ucapkan terima kasih kepada pembimbing saya yang telah memberikan saran dan dukungan dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

Daftar Pustaka

- [1] S. R. Ramadhani & N. Nurwati. 2021. Dampak Pandemi COVID-19 terhadap Angka Perceraian, *Jurnal Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (JPPM)*, 2(1), 88–94.
- [2] M. Manaqib, M. Azizah, S. E. Hartati, S. Pratiwi

- & R. A. Maulana. 2021. Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Covid-19 Dengan Lockdown Dan Karantina, *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 15(3), 479–492.
- [3] D. D. Darmansah & N. W. Wardani. 2021. Analisis Pesebaran Penularan Virus Corona di Provinsi Jawa Tengah Menggunakan Metode K-Means Clustering, *JATISI (Jurnal Teknik Informatika dan Sistem Informasi)*, 8(1), 105–117.
- [4] S. P. Sari & E. Arfi. 2021. Analysis of the SIR Dynamic Model in Cases of the Spread of Corona Virus Disease-19 (COVID-19), *Indonesian Journal of Applied Mathematics*, 1(2), 61–68.
- [5] M. I. Afwan & Helma. 2021. Mathematical Modeling of the Spread of the Covid-19 Disease using the SIRS Model, *Journal of Mathematics UNP*, 4(2), 34–40.
- [6] S. A. Prayitno, H. P. Pribadi & R. A. Ifadah. 2020. Participation in Implementing the Prevention Protocol Spread of Corona Virus Disease (Covid-19) in Sutrisno's Community, *DedikasiMU(Journal of Community Service)*, 2(3), 504.
- [7] Z. Kusnul. 2020. Infeksi Covid-19 Dan Sistem Imun: Peran Pengobatan Herbal Berbasis Produk Alam Berkhasiat, *Jurnal Ilmiah Pemenang*, 2(2), 26–31.
- [8] M. Jannah, M. A. Karim & Y. Yulida. 2021. Analisis Kestabilan Model SEIR Untuk Penyebaran Covid-19 Dengan Parameter Vaksinasi, *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 15(3), 535–542.