Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 1, pp. 523 - 530 , Januari-April 2024,
ISSN: 2503 – 2984

Model Matematika $SEIR$ Pada Penyakit Diabetes Mellitus Tipe 2

Siti Nurazizah[1)]
[1)]Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari
Email: azizahnurazizah1003@gmail.com

Asrul Sani[1,a)], **Kabil Djafar[1,b)]**, **Herdi Budiman[1,c)]**, **Wayan Somayasa[1,d)]** dan **La Gubu[1,e)]**
[1)]Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari
Email: [a)]saniasrul1969@gmail.com, [b)]kabildjafar@uho.ac.id, [c)]herdi_budiman@yahoo.com,
[d)]wayan.somayasa@uho.ac.id, dan [e)]la.gubu@uho.ac.id

ABSTRAK

Diabetes mellitus adalah penyakit metabolisme karbohidrat, protein dan lemak yang tidak normal. Penyakit ini disebabkan oleh kurangnya sensitivitas otot dan jaringan terhadap insulin, yang disebut resistensi insulin, atau kekurangan hormon insulin. Diabetes mellitus tipe 2, pankreas masih dapat membuat insulin, tetapi insulin tersebut berkualitas buruk dan tidak dapat berfungsi dengan baik. Penelitian ini bertujuan untuk membahas model epidemik $SEIR$ untuk penyakit diabetes mellitus tipe 2. Dari hasil analisis model $SEIR$ diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit menggunakan linearisasi disekitar titik kesetimbangan. Untuk mencari bilangan reproduksi dasar juga dilakukan dengan metode matriks generasi selanjutnya. Hasilnya, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik jika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, artinya penyakit akan menghilang setelah jangka waktu tertentu, sedangkan titik kesetimbangan endemik stabil jika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu, artinya penyakit akan tetap ada. Simulasi numerik model untuk penyakit diabetes mellitus tipe 2 yang dilakukan sejalan dengan analisis perilaku model.

Kata Kunci: Diabetes Mellitus Tipe 2, Model $SEIR$, Kestabilan Titik Kesetimbangan, Bilangan Reproduksi Dasar.

ABSTRACT

Diabetes mellitus is a metabolic disorder of carbohydrates, proteins, and fats. This disease is caused by decreased sensitivity of muscles and tissues to insulin, known as insulin resistance, or a deficiency of the insulin hormone. In type 2 diabetes mellitus, the pancreas can still produce insulin, but the insulin produced is of poor quality and does not function effectively. This research aims to discuss the $SEIR$ epidemiological model for type 2 diabetes mellitus. From the analysis of the $SEIR$ model, two equilibrium points are obtained. The disease free equilibrium point and the endemic equilibrium point. The stability analysis of the disease free equilibrium point is performed by linearization around the equilibrium point. The basic reproduction number is also determined using the next generation matrix method. The results show that the disease free equilibrium point is asymptotically stable if the basic reproduction number is less than one. This means that the disease will disappear after a certain period of time. On the other hand, the endemic equilibrium point is stable if the basic reproduction number is greater than one, indicating that the disease will persist. Numerical simulation of the model for type 2 diabetes mellitus are conducted in line with the analysis of the model's behavior.

Keywords: Type 2 Diabetes Mellitus, $SEIR$ Model, Stability of Equilibrium Points, Basic Reproduction Number

1. Pendahuluan

Era globalisasi membawa pengaruh yang sangat besar tidak hanya dalam bidang ekonomi tetapi juga dalam bidang lainnya salah satunya adalah bidang kesehatan. Informasi terkait kesehatan dapat diperoleh dari berbagai sumber *online* yang beberapa di antaranya dapat menjadi sumber informasi yang bisa diandalkan. Masyarakat semakin sadar akan pentingnya perilaku gaya hidup sehat. Masyarakat semakin meningkat perhatiannya terhadap penyakit yang tidak menular. Hal ini disebabkan oleh meningkatnya frekuensi penyakit-penyakit tersebut di masyarakat. Salah satu dari sepuluh penyebab utama kematian adalah penyakit diabetes mellitus yang merupakan salah satu jenis penyakit tidak menular, situasi ini terjadi baik di negara maju maupun negara berkembang serta negara dengan ekonomi rendah. Oleh karena itu masyarakat perlu diberikan pengetahuan tentang penyakit tidak menular dengan melihat kencenderungan semakin meningkatnya prevalensi penyakit tidak menular dalam masyarakat, termasuk kalangan masyarakat Indonesia [1].

Diabetes Mellitus adalah penyakit metabolisme karbohidrat, protein dan lemak yang tidak normal.

Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 1, pp. 523 - 530 , Januari-April 2024,
ISSN: 2503 – 2984

Penyakit ini disebabkan oleh kurangnya sensitivitas otot dan jaringan terhadap insulin, yang disebut resistensi insulin, atau kekurangan hormon insulin [2].

Diabetes Mellitus adalah gangguan metabolisme dengan hiperglikemia sebagai gejala yang umum. Terdapat beberapa jenis diabetes mellitus, yang diakibatkan oleh interaksi yang kompleks antara faktor genetik dan lingkungan. Diabetes tipe 2 adalah kelompok penyakit heterogen yang ditandai dengan berbagai tingkat resistensi insulin, gangguan sekresi insulin, dan peningkatan produksi glukosa. Diabetes tipe 2 dimulai dengan periode homeostasis glukosa yang tidak normal, yang dikenal sebagai kadar glukosa puasa yang tidak normal atau *abnormal fasting glucose levels* (IFG) atau toleransi glukosa yang tidak normal atau *abnormal glucose tolerance* (IGT) [3].

Pada tahun 2006 jumlah penderita diabetes mellitus di Indonesia mencapai 14 juta orang. Dari jumlah tersebut, baru 50% pasien yang sadar mereka mengidap penyakit diabetes mellitus, dan hanya 30% saja yang melakukan pengobatan secara teratur. Diabetes melitus merupakan penyakit kronis yang memberikan banyak masalah serius terkait dengan aktifitas seseorang. Sangat diperlukan pengetahuan yang luas serta perubahan perilaku untuk mengatasi kondisi tersebut. Perubahan gaya hidup mencakup perencanaan diet yang ketat, penggunaan obat-obatan serta teknik monitoring glukosa darah untuk semua pasien [4].

Beberapa peneliti telah melakukan pengembangan dari model matematika yang membahas tentang penyakit diabetes mellitus, diantaranya yaitu yang dalam artikelnya mengkaji tentang model matematika penyebaran penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik yaitu model epidemi SEI. Pada populasi SEI, populasi dibagi menjadi tiga subpopulasi yaitu subpopulasi individu rentan (*Susceptible*), subpopulasi individu laten (*Exposed*), dan subpopulasi individu terinfeksi (*Infected*) [5].

Penelitian lain tentang penyakit diabetes mellitus juga telah dilakukan sebelumnya yang membahas tentang analisis model matematika penyebaran penyakit diabetes mellitus dengan faktor genetik. Dengan menggunakan model epidemi SEI. Pada populasi SEI, populasi dibagi menjadi tiga subpopulasi yaitu subpopulasi individu rentan (*Susceptible*), subpopulasi individu laten (*Exposed*), dan subpopulasi individu terinfeksi (*Infected*) [6].

Penelitian yang dilakukan oleh [7] pemodelan matematika yang dikembangkan mempertimbangkan faktor genetik sehingga tergolong diabetes mellitus tipe 1 dan model yang dikembangkan adalah pemodelan matematika tipe $SEIR$ dengan menggunakan insulin sebagai pengobatan.

[8] dalam sebuah makalah tentang model matematika non-linear diabetes mellitus, menganalisis proses perubahan diabetes mellitus ke tahap komplikasi. Komplikasi tidak disebabkan oleh pengaruh ekonomi, sosial atau medis. Model ini menentukan titik kestabilan dan melakukan perhitungan numerik menggunakan MATLAB untuk memperkirakan ukuran populasi penderita diabetes dan jumlah penderita diabetes dengan komplikasi.

[9] menganalisis kestabilan model $SEII_T$ pada penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan. Pada penelitian ini dilakukan simulasi menggunakan Maple berdasarkan data dari Kota Yogyakarta tahun 2014. Berdasarkan simulasi yang dibentuk dari model $SEII_T$, diperoleh kesimpulan jika laju kontak infektif individu yang rentan menjadi individu yang laten semakin besar, maka tingkat penyebaran penyakit diabetes mellitus semakin besar.

Model $SEIR$ (*Susceptible – Exposed – Infectious – Recovered*) juga telah banyak diteliti sebelumnya, misalnya pada penelitian yang dilakukan oleh [10] pada model $SEIR$ penyakit campak dengan vaksinasi dan migrasi. [11] model $SEIR$ untuk penyakit hepatitis c dengan pengobatan pada populasi terinfeksi kronis. [12] pada analisis penyebaran penyakit filariasis menggunakan model $SEIR$ di Provinsi Sumatera Utara.

Perbedaan penelitian ini dengan penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya yaitu pada model dan asumsi yang diberikan. Dengan memodifikasi model dan menggunakan asumsi yang berbeda maka penulis tertarik untuk mengkaji **"Model Matematika $SEIR$ pada Penyakit Diabetes Mellitus Tipe 2"**.

2. Model Matematika

Asumsi yang digunakan untuk memodelkan penyakit diabetes mellitus tipe 2, yaitu:

a. Individu yang sakit dapat disembuhkan.
b. Pengaruh migrasi diabaikan sehingga penyebaran penyakit bersifat tertutup dalam suatu populasi.
c. Penyakit dapat disembuhkan.
d. Tidak adanya faktor genetik yang mempengaruhi penyebaran penyakit diabetes mellitus sehingga tergolong diabetes mellitus tipe 2
e. Dengan adanya perawatan memperpanjang usia hidup penderita.

f. Laju kelahiran masuk kelas S.
g. Individu yang memiliki kebiasaan buruk, penurunan hormon insulin, dan peningkatan glukosa darah masuk kelas E *(Exposed)*.
h. Terjadi kematian akibat penyakit diabetes mellitus tipe 2.

Berdasarkan asumsi pada model $SEIR$ penyebaran penyakit diabetes mellitus tipe 2 maka diperoleh model matematika sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= A-\mu S-\beta SE\\ \frac{dE}{dt} &= \beta SE-\mu E-\delta E \qquad (1)\\ \frac{dI}{dt} &= \delta E-(\mu+\alpha)I-\gamma I\\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I-\mu R\end{aligned}$$

Keterangan:
$S(t)$: Jumlah individu yang rentan pada waktu ke $-\, t$
$E(t)$: Jumlah individu yang mengalami gejala namun belum terinfeksi pada waktu ke $-\, t$
$I(t)$: Jumlah individu yang terinfeksi penyakit pada waktu ke $-\, t$
$R(t)$: Jumlah individu yang sembuh pada waktu ke $-\, t$
A: Laju kelahiran pada populasi
β: Laju kontak infektif individu yang rentan terhadap individu yang laten
δ: Laju perpindahan individu laten terhadap individu sakit
μ: Laju kematian alami
α: Laju kematian akibat penyakit diabetes mellitus tipe 2
γ: Laju perpindahan individu *infected* menjadi populasi *recovery*

3. Analisis

Model $SEIR$ pada penyakit diabetes mellitus tipe 2 berupa system persamaan diferensial nonlinear. Sistem (1) memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan titik kesetimbangan pada saat tidak ada penyakit dalam populasi sehingga akan diperoleh titik $E_0 = (S, E, I, R)$, telah diketahui pada titik kesetimbangan bebas penyakit bahwa $E = I = 0$, maka selanjutnya akan dicari nilai dari S, R

$$\begin{aligned}\gamma I-\mu R &= 0\\ \gamma(0)-\mu R &= 0 \qquad (2)\\ -\mu R &= 0\\ R &= 0\end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi $E = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned}A-\mu S-\beta SE &= 0\\ A-\mu S-\beta S(0) &= 0 \qquad (3)\\ A-\mu S &= 0\\ S &= \frac{A}{\mu}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (S, E, I, R) = (\frac{A}{\mu}, 0,0,0)$

Titik kesetimbangan endemik atau terjadi penyakit adalah kondisi dimana kemungkinan terjadi penyebaran penyakit diabetes mellitus tipe 2 ($E > 0$). Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\beta SE-(\mu-\delta)E &= 0\\ \Leftrightarrow \beta SE &= (\mu+\delta)E\\ S &= \frac{(\mu+\delta)E}{\beta} \qquad (4)\\ \hat{S} &= \frac{\mu+\delta}{\beta}\end{aligned}$$

dengan melakukan substitusi persamaan (4) ke persamaan $(4.2a)$ diperoleh

$$\begin{aligned}A-\mu S-\beta SE &= 0\\ \Leftrightarrow A-\mu\left(\frac{\mu+\delta}{\beta}\right)-\beta\left(\frac{\mu+\delta}{\beta}\right)E &= 0\\ -\beta\left(\frac{\mu+\delta}{\beta}\right)E &= -A+\mu\left(\frac{\mu+\delta}{\beta}\right)\\ \beta\left(\frac{\mu+\delta}{\beta}\right)E &= A-\mu\left(\frac{\mu+\delta}{\beta}\right)\\ (\mu+\delta)E &= A-\mu\left(\frac{\mu+\delta}{\beta}\right) \qquad (5)\\ E &= \frac{A-\mu\left(\frac{\mu+\delta}{\beta}\right)}{(\mu+\delta)}\\ E &= \frac{A}{(\mu+\delta)}-\frac{\mu(\mu+\delta)}{\beta(\mu+\delta)}\\ E &= \frac{A}{(\mu+\delta)}-\frac{\mu}{\beta}\\ E &= \frac{A\times\beta-\mu(\mu+\delta)}{(\mu+\delta)\beta}\\ \hat{E} &= \frac{A\beta-\mu\delta-\mu^2}{(\mu+\delta)\beta}\end{aligned}$$

dengan menyelesaikan persamaan (5) ke persamaan $(4.2c)$ diperoleh

$$\begin{aligned}\delta E-(\mu+\alpha)I-\gamma I &= 0\\ \Leftrightarrow \delta\left(\frac{A\beta-\mu\delta-\mu^2}{(\mu+\delta)\beta}\right)-(\mu+\alpha+\gamma)I &= 0\\ -(\mu+\alpha+\gamma)I &= -\delta\left(\frac{A\beta-\mu\delta-\mu^2}{(\mu+\delta)\beta}\right)\\ I &= \frac{-\frac{\delta(A\beta-\mu\delta-\mu^2)}{(\mu+\delta)\beta}}{-(\mu+\alpha+\gamma)} \qquad (6)\\ I &= \frac{\delta(A\beta-\mu\delta-\mu^2)}{\beta(\mu+\delta)(\mu+\alpha+\gamma)}\end{aligned}$$

$$\hat{I} = \frac{\delta(A\beta - \mu\delta - \mu^2)}{\beta(\delta\alpha + \mu\alpha + \delta\gamma + \mu\delta + \gamma\mu + \mu^2)}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (6) ke persamaan $(4.2d)$ diperoleh

$$\gamma I - \mu R = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma\left(\frac{\delta(A\beta - \mu\delta - \mu^2)}{\beta(\delta\alpha + \mu\alpha + \delta\gamma + \mu\delta + \gamma\mu + \mu^2)}\right) - \mu R = 0$$

$$-\mu R = \frac{\delta\gamma(A\beta - \mu\delta - \mu^2)}{\beta(\delta\alpha + \mu\alpha + \delta\gamma + \mu\delta + \gamma\mu + \mu^2)}$$

$$R = \frac{-\frac{\delta\gamma(A\beta - \mu\delta - \mu^2)}{\beta(\delta\alpha + \mu\alpha + \delta\gamma + \mu\delta + \gamma\mu + \mu^2)}}{-\mu} \qquad (7)$$

$$\hat{R} = \frac{\delta\gamma(A\beta - \mu\delta - \mu^2)}{\beta(\delta\alpha + \mu\alpha + \delta\gamma + \mu\delta + \gamma\mu + \mu^2)\mu}$$

Maka diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu $E_1(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{R}) = (\frac{\mu+\delta}{\beta}, \frac{A\beta-\mu\delta-\mu^2}{(\mu+\delta)\beta}, \frac{\delta(A\beta-\mu\delta-\mu^2)}{\beta(\delta\alpha+\mu\alpha+\delta\gamma+\mu\delta+\gamma\mu+\mu^2)}, \frac{\delta\gamma(A\beta - \mu\delta - \mu^2)}{\beta(\delta\alpha + \mu\alpha + \delta\gamma + \mu\delta + \gamma\mu + \mu^2)\mu})$

Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan menggunakan Persamaan yang hanya mengandung infeksi. Pendekatan yang digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar menggunakan matriks generasi selanjutnya. Matriks generasi selanjutnya dapat diperoleh dari Persamaan sub sistem terinfeksi yaitu:

$$\frac{dE}{dt} = \beta SE - \mu E - \delta E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - (\mu + \alpha)I - \gamma I$$

Matriks $\mathcal{F}$ dan matriks $\mathcal{V}$ sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta SE \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\mu + \delta)E \\ \delta E - (\mu + \alpha + \gamma)I \end{pmatrix}$$

Selanjutnya matriks $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ di atas diturunkan terhadap E, I serta substitusi nilai titik kesetimbangan penyakit pada matriks F. Sehingga diperoleh matriks $\mathcal{F} = F$ dan matriks $\mathcal{V} = V$ yaitu:

$$F = \begin{bmatrix} \beta S - \mu - \delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \mu + \delta & 0 \\ -\delta & \mu + \alpha + \gamma \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari Invers dari matriks V sebagai berikut:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\mu + \delta)} & 0 \\ \frac{\delta}{(\mu + \delta)(\mu + \alpha + \gamma)} & \frac{1}{(\mu + \alpha + \gamma)} \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan menggunakan nilai F dan Invers dari V, maka diperoleh

$$K = FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta(\frac{A}{\mu}) - \mu - \delta}{(\mu + \delta)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks di atas, maka akan dicari $det(\lambda I - K) = 0$.

$$det(\lambda I - K) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\beta(\frac{A}{\mu}) - \mu - \delta}{(\mu + \delta)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} \frac{\beta(\frac{A}{\mu}) - \mu - \delta}{(\mu + \delta)} - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\beta(\frac{A}{\mu}) - \mu - \delta}{(\mu + \delta)} - \lambda\right)(-\lambda) - ((0)(0)) = 0$$

$$\left(\frac{\beta A - \mu\delta - \mu^2}{\mu} - \lambda\right)(-\lambda) = 0$$

$$\left(\frac{\beta A}{\mu} - \frac{\mu\delta}{\mu} - \frac{\mu^2}{\mu}\right) - \lambda(-\lambda) = 0$$

$$\left(\frac{\beta A}{\mu} - \delta - \mu\right) - \lambda(-\lambda) = 0$$

$$\left(\frac{\beta A}{\mu} - (\delta + \mu)\right) - \lambda(-\lambda) = 0$$

$$\left(\frac{\beta A}{\mu(\delta + \mu)} - \lambda\right)(-\lambda) = 0$$

diperoleh persamaan karakteristiknya untuk $\lambda_1 = \frac{\beta A}{\mu(\delta+\mu)}$ dan $\lambda_2 = 0$.

Karena bilangan reproduksi dasar diperoleh dari radius spektral atau dari nilai eigen terbesar, maka diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0):

$$R_0 = \frac{\beta A}{\mu(\delta + \mu)}$$

Matriks Jacobian dari sistem (1) adalah

$$J(E) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta E & -\beta S & 0 & 0 \\ \beta E & \beta S - \mu - \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -\mu - \alpha - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

akan dicari titik kesetimbangan bebas penyakit dengan cara melakukan substitusi titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0(S, E, I, R) = (\frac{A}{\mu}, 0,0,0)$ ke matriks (4.8), sehingga diperoleh,

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta A}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta A}{\mu} - \delta - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -\mu - \alpha - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai eigen dari matriks $J(E_0)$ diperoleh dari persamaan berikut:

$$\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta A}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta A}{\mu} - \delta - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -\mu - \alpha - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\mu - \lambda & -\frac{\beta A}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta A}{\mu} - \delta - \mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -\mu - \alpha - \gamma - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu - \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\mu - \lambda)\left(\frac{\beta A}{\mu} - \delta - \mu - \lambda\right)(-\mu - \alpha - \gamma - \lambda)(-\mu - \lambda) = 0$$

maka diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\mu$$
$$\lambda_2 = \frac{\beta A}{\mu\delta + \mu^2}$$
$$\lambda_3 = -\mu - \alpha - \gamma$$
$$\lambda_4 = -\mu$$

Teorema 1. Misalkan $R_0 = \frac{\beta A}{\mu\delta + \mu^2}$, maka titik kesetimbangan E_0 stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.

Bukti. Nilai eigen matriks pada Matriks 4.9 di titik kesetimbangan E_0 akan bersifat stabil asimtotik apabila $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ketika $\frac{\beta A}{\mu\delta + \mu^2} < 1, \lambda_3 < 0$ dan $\lambda_4 < 0$. Untuk semua nilai parameter bernilai positif, yaitu nilai $\mu > 0, \beta > 0, \delta > 0$ dan $\gamma > 0$ sehingga $\lambda_1 = -\mu < 0$, $\lambda_2 = \frac{\beta A}{\mu} - \delta - \mu - \lambda < 0$ saat $\frac{\beta A}{\mu\delta + \mu^2} < 0$ dan $\lambda_3 = -\mu - \alpha - \gamma < 0$ serta $\lambda_4 = -\mu < 0$. Maka titik kesetimbangan E_0 bersifat stabil asimtotik.

4. Simulasi Numerik

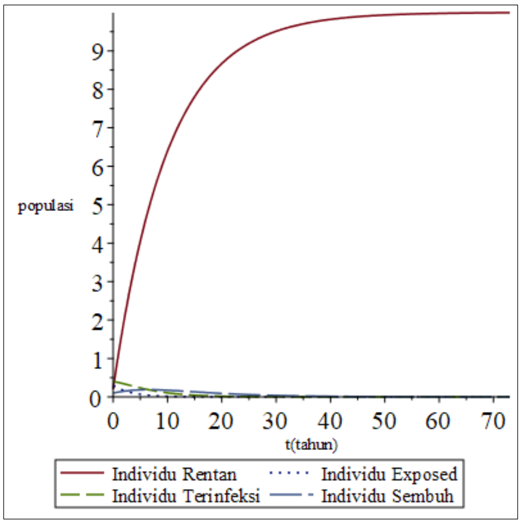
Kemudian dilakukan simulasi numerik menggunakan *Software* Maple 2018 dengan nilai Parameter terdapat pada Tabel 1.

Tabel 1. Daftar Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Unit	Penafsiran
A	1	$\frac{Individu}{tahun}$	Laju kelahiran populasi
δ	0,2	$\frac{Individu}{tahun}$	Laju individu dari laten menjadi terinfeksi
μ	0,1	$\frac{Individu}{tahun}$	Laju kematian alami karena penyakit
γ	1	$\frac{Individu}{tahun}$	Laju individu sakit menjadi sembuh
α	134×10^{-5}	$\frac{Individu}{tahun}$	Laju kematian akibat penyakit.

Parameter β menyatakan laju kontak infektif individu rentan menjadi individu yang laten. Nilai parameter ini dapat bervariasi. Diberikan simulasi model yang akan menunjukkan pengaruh dari variasi nilai parameter β terhadap penyebaran penyakit diabetes mellitus tipe 2. Berikut simulasi untuk $R_0 < 1, R_0 > 1$ dan $R_0 = 1$.

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 1 diperoleh bilangan reproduksi dasar dari Sistem (1) adalah $R_0 = 0.02000000000$. Hasil simulasinya adalah sebagai berikut:

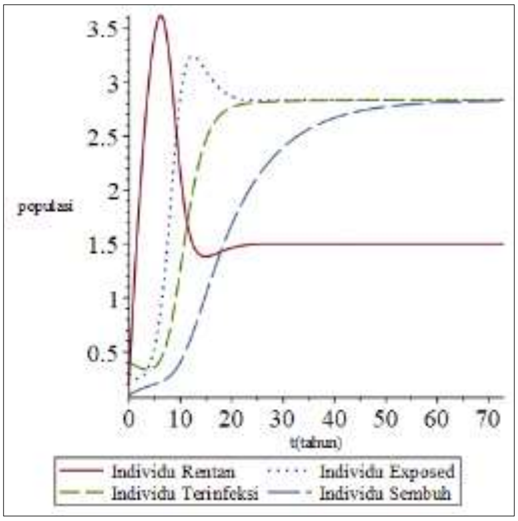


Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 1, pp. 523 - 530 , Januari-April 2024,
ISSN: 2503 – 2984

Gambar. 1 Laju Pertumbuhan Bebas Penyakit ($R_0 < 1$) Pada Model $SEIR$ dengan $\beta = 0{,}002$

Berdasarkan Gambar 4.6.1 ditunjukkan bahwa populasi pada individu rentan bergerak naik dan stabil menuju titik kesetimbangan di sekitar $S = 10$. Pada individu $exposed$ menurun dari nilai awal, kemudian stabil di sekitar $E = 0$. Pada individu terinfeksi mengalami hal serupa dengan individu laten, dimana golongan terinfeksi ini mengalami penurunan kemudian stabil dan menuju titik kesetimbangan di sekitar $I = 0$. Pada individu sembuh juga mengalami penurunan dan stabil menuju titik kesetimbangan $R = 0$, sehingga pada waktu tertentu proporsi individu sehat tidak mengalami perubahan sehingga berada pada kondisi yang setimbang. Untuk kondisi $R_0 < 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik, ini berarti individu yang masuk di masing-masing kelas akan berkurang dan bahkan menghilang dari populasi.

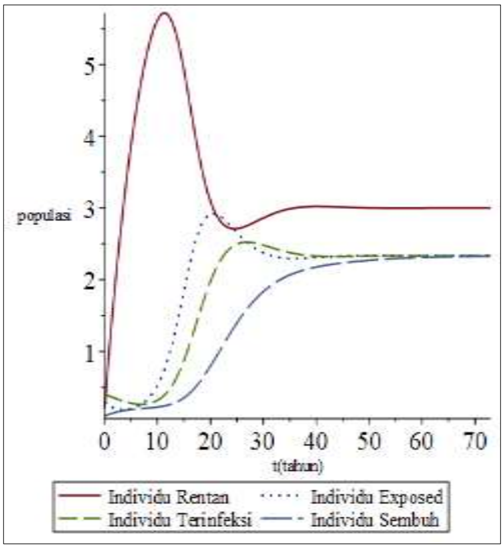
Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik titik kesetimbangan endemik untuk $R_0 > 1$. Diperoleh bilangan reproduksi dasar dari sistem (1) adalah $R_0 = 2$. Hasil simulasinya adalah sebagai berikut:



Gambar 2. Laju Pertumbuhan Endemik ($R_0 > 1$) Pada Model $SEIR$ dengan $\beta = 0{,}2$

Pada Gambar 2 ditunjukkan bahwa populasi manusia rentan meningkat dari nilai awal kemudian menurun dan stabil di sekitar $S = 1.500000000$. Populasi manusia *exposed* meningkat dari nilai awal kemudian stabil di sekitar $E = 2.833333333$. Populasi manusia terinfeksi juga mengalami hal yang sama seperti kelas *exposed*, dimana individu ini mengalami kenaikkan dan bergerak stabil di sekitar $I = 2.833333333$. Untuk populasi manusia sembuh juga bergerak naik dari nilai awal kemudian stabil di sekitar $R = 2.833333333$. Berdasarkan hal tersebut menunjukkan bahwa jika parameter yang terbentuk memenuhi $R_0 > 1$, maka penyakit diabetes mellitus tipe 2 akan menjadi endemik.

Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk $R_0 = 1$. Diperoleh bilangan reproduksi dasar dari sistem (1) adalah $R_0 = 1.000000000$ Hasil simulasinya adalah sebagai berikut:

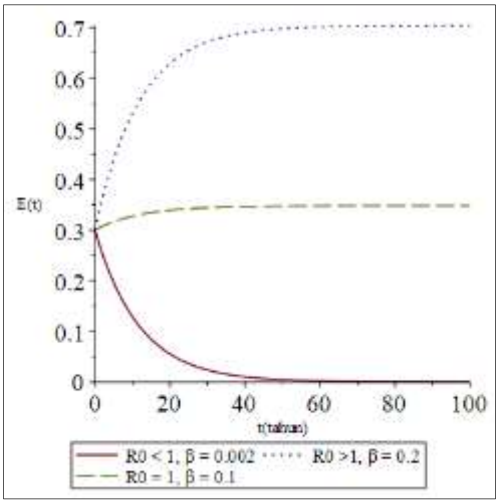


Gambar 3. Laju Petumbuhan $R_0 = 1$ Pada Model $SEIR$ dengan $\beta = 0{,}1$

Pada Gambar 3 ditunjukkan bahwa populasi manusia rentan meningkat dari nilai awal kemudian menurun dan stabil di sekitar $S = 10$. Populasi manusia *exposed* menin gkat dari nilai awal kemudian stabil di sekitar $E = 0$. Populasi manusia terinfeksi juga mengalami hal yang sama seperti kelas *exposed*, dimana individu ini mengalami kenaikkan dan bergerak stabil di sekitar $I = 0$. Untuk populasi manusia sembuh juga bergerak naik dari nilai awal kemudian stabil di sekitar $R = 0$.

Selanjutnya dibuat simulasi untuk menentukan grafik $E(t)$ dengan mennggunakan parameter pada Tabel 1 sesuai dengan kondisi R_0 yaitu saat $R_0 < 1$ dengan nilai awal $E(0) = 0{,}3$, $R_0 > 1$ dengan nilai awal $E(0) = 0{,}3$, dan $R_0 = 1$ dengan nilai awal $E(0) = 0{,}3$. Hasil simulasinya adalah sebagai berikut:

Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 1, pp. 523 - 530 , Januari-April 2024,
ISSN: 2503 – 2984



Gambar 4. Grafik $E(t)$ Pada $R_0 < 1, R_0 > 1$, dan $R_0 = 1$

Pada Gambar 4 untuk kondisi $R_0 < 1$ menunjukkan bahwa jumlah individu yang berada pada kelas laten pada penyakit diabetes mellitus tipe 2 semakin bertambahnya waktu akan menghilang. Kemudian untuk kondisi $R_0 > 1$ terlihat bahwa pada kelas sakit terjadi peningkatan jumlah individu. Sedangkan untuk kondisi $R_0 = 1$ ditunjukkan bahwa individu pada kelas sakit bergerak stabil menuju titik kesetimbangan yang artinya bahwa penyakit diabetes mellitus tipe 2 akan menetap dalam suatu populasi.

Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan pada keadaan bebas penyakit $R_0 < 1$ diperoleh titik ekuilibirium $E_0 = (S, E, I, R) = (10{,}0{,}0{,}0)$ dengan laju individu dari rentan menjadi laten $\beta = 0{,}002$ diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.6.2 dengan nilai $R_0 = 0.0200000000$. Oleh karena itu berdasarkan Gambar 4.6.1 penyakit diabetes mellitus tipe 2 tidak bersifat endemik dan akan berkurang seiring berjalannya waktu.

Hasil ini juga didukung oleh penelitian yang dilakukan oleh Dodi Suryanto (2017) diperoleh formulasi untuk $R_0 = \frac{\rho\beta N}{(\rho+\alpha N)(\rho+\pi N)}$, dengan nilai parameter $\beta = 5 \times 10^{-2}$, setelah simulasi dilakukan untuk keadaan $R_0 < 1$ diperoleh nilai $R_0 = 0.29$. Berdasarkan hal ini disimpulkan bahwa penyakit diabetes mellitus tipe 2 tidak bersifat endemik dan akan berkurang seiring berjalannya waktu.

Selain itu, pemodelan penyakit diabetes mellitus tipe 2 juga dilakukan oleh Lestari (2017) diperoleh formulasi untuk $R_0 = \frac{\beta A}{\mu(\mu+1)}$, setelah simulasi dilakukan untuk keadaan $R_0 < 1$ dengan nilai parameter $\beta = 0{,}000005$, diperoleh nilai $R_0 = 0.664$. Hal ini berarti jumlah individu yang masuk di masing-masing kelas akan berkurang dan bahkan menghilang dari populasi.

Selanjutnya, berdasarkan simulasi yang telah dilakukan pada keadaan endemik $R_0 > 1$ dengan $\beta = 0{,}2$ titik kesetimbangan endemik bersifat stabil spiral seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.6.3 dengan nilai $R_0 = 2$. Berdasarkan hal tersebut menunjukkan bahwa jika parameter yang terbentuk memenuhi $R_0 > 1$, maka penyakit diabetes mellitus tipe 2 akan menjadi endemik.

Hasil ini juga didukung oleh penelitian yang dilakukan oleh Lestari (2017) diperoleh formulasi untuk $R_0 = \frac{\beta A}{\mu(\mu+1)}$, dengan $\beta = 0.000015$ setelah simulasi dilakukan untuk keadaan $R_0 > 1$ yang ditunjukkan dengan hasil simulasi $R_0 = 3.318$, bahwa jika parameter yang terbentuk memenuhi $R_0 > 1$, maka penyakit diabetes mellitus akan menjadi endemik.

Selanjutnya, berdasarkan simulasi yang telah dilakukan pada keadaan $R_0 = 1$ dengan $\beta = 0{,}1$ diperoleh titik ekuilibrium $E_0(S, E, I, R) = 10{,}0{,}0{,}0)$ titik kesetimbangan bersifat tidak stabil seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.6.4 dengan nilai $R_0 = 1.000000000$. Selanjutnya, berdasarkan simulasi yang telah dilakukan pada individu *exposed* $E(t)$ dengan memberikan nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi R_0. Setelah simulasi dilakukan dapat ditunjukkan bahwa untuk kondisi $R_0 < 1$ menunjukkan bahwa jumlah individu yang berada pada kelas laten pada penyakit diabetes mellitus tipe 2 semakin bertambahnya waktu akan menghilang. Kemudian untuk kondisi $R_0 > 1$ terlihat bahwa pada kelas sakit terjadi peningkatan jumlah individu, hal ini disebabkan karena pada kurun waktu tersebut telah terjadi kontak antara individu rentan dengan individu pada kelas laten yang menyebabkan individu pada kelas rentan terpengaruhi dengan pola hidup tidak sehat yang menyebabkan banyak individu dari kelas rentan menjadi individu kelas aten. Sedangkan untuk kondisi $R_0 = 1$ ditunjukkan bahwa individu pada kelas sakit bergerak stabil menuju titik kesetimbangan yang artinya bahwa penyakit diabetes mellitus tipe 2 akan menetap dalam suatu populasi.

Hasil ini juga didukung oleh penelitian yang dilakukan oleh Ardiansah dan Kharis (2012) diperoleh formulasi untuk $R_0 = \frac{\beta}{\mu+\alpha}$, yang ditunjukkan pada simulasi untuk kelas terinfeksi $E(t)$ pada kondisi $E(t) \to 0$ berarti semakin bertambahnya waktu, individu yang berada pada kelas laten akan semakin menghilang.

Pembahasan di atas menunjukkan bahwa nilai parameter β yang semakin meningkat berhubungan dengan nilai R_0 yang semakin besar. Hal ini berarti bahwa jika laju kontak infektif individu rentan menjadi individu laten semakin meningkat, maka berakibat semakin besar tingkat penyebaran penyakit diabetes mellitus tipe 2.

5. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan uraian pembahasan di atas, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Diperoleh model $SEIR$ pada penyakit diabetes mellitus tipe 2

$$\frac{dS}{dt} = A - \mu S - \beta SE$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SE - \mu E - \delta E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - (\mu + \alpha)I - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

2. Terdapat dua titik kesetimbangan yang diperoleh dari model $SEIR$ pada penyakit diabetes mellitus tipe 2 yaitu:
   a. Titik kesetimbangan bebas penyakit
   $$E_0 = (S, E, I, R) = (\frac{A}{\mu}, 0,0,0)$$
   b. Titik kesetimbangan endemik
   $E_1(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{R})$
   Dengan
   $$\hat{S} = \frac{\mu + \delta}{\beta}$$
   $$\hat{E} = \frac{A\beta - \mu\delta - \mu^2}{(\mu + \delta)\beta}$$
   $$\hat{I} = \frac{\delta(A\beta - \mu\delta - \mu^2)}{\beta(\delta\alpha + \mu\alpha + \delta\gamma + \mu\delta + \gamma\mu + \mu^2)}$$
   $$\hat{R} = \frac{\delta\gamma(A\beta - \mu\delta - \mu^2)}{\beta(\delta\alpha + \mu\alpha + \delta\gamma + \mu\delta + \gamma\mu + \mu^2)\mu}$$
3. Model penyebaran penyakit diabetes mellitus tipe 2 memiliki suatu parameter indikator penyebaran penyakit yang disebut bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai berikut:
   $$R_0 = \frac{\beta A}{\mu\delta + \mu^2}$$

Pada penelitian ini telah dibuat model $SEIR$ pada penyakit diabetes mellitus tipe 2. Model ini dapat dikembangkan lagi mengingat masih terdapat penyebab lain yang dapat dipertimbangkan. Model ini juga kiranya dapat digunakan untuk penyakit lainnya yang memenuhi asumsi model $SEIR$.

Ucapan Terima Kasih: Penelitian ini dapat dilaksanakan dengan lancar berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, untuk itu peneliti mengucapkan terima kasih kepada Civitas Akademika Universitas Halu Oleo, dosen pembimbing, tim penguji dan pihak-pihak yang telah memfasilitasi dan membantu berjalannya penelitian ini.

Daftar Pustaka

[1] M. Rizal, dan R. Artiono, (2021), Analisis Dinamik Model Koinfeksi Penyakit Difteri dan Covid-19, *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 9(2), 268–279.

[2] S.H.S. Marpaung, (2019), Mengidentifikasi Masalah Dalam Diagnosa Keperawatan Pada Pasien Yang Menderita Diabetes Mellitus, *Jurnal OSFPreprints*, 1(4), 1–5.

[3] P.W. Ardha, dan B.N. Khairun, (2015), Empat Pilar Penatalaksanaan Pasien Diabetes Mellitus Tipe 2, *Majority*, 4(9), 8–12.

[4] M. Teli, (2017), Kualitas Hidup Pasien Diabetes Melitus Tipe 2 Di Puskesmas Kota Kupang, *Jurnal Info Kesehatan*, 15(1), 119–134.

[5] N. Ardiansah, dan M. Kharis, (2012), Model Matematika Untuk Penyakit Diabetes Tanpa Faktor Genetik, *Jurnal MIPA Unnes*, 35(1), 99–107.

[6] R. Abraham, (2015), Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Diabetes Dengan Faktor Genetik, *Sains*, 15(1), 31–37.

[7] E. Dodi Suryanto, (2017), *Mathematical Modeling of* SEIR *Type to Controlling Diabetes Mellitus Disease Using Insulin*, *Jurnal Inotera*, 2(2), 9−17.

[8] A. Boutayeb, A Chetouani, A Achouyab, dan E.H. Twizell, (2006), *A non-linear Population Model of Diabetes Mellitus*, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 21(1–2), 127–139.

[9] H.I. Lestari, (2017), Analisis Kestabilan Model SEII_T (*Susceptible-Exposed-Ill-Ill With Treatment)* Pada Penyakit Diabetes Mellitus, *Jurnal Matematika*, 6(4), 19–29.

[10] M. Soleh, dan S. Rahma, (2012), Model SEIR Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Migrasi, *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, 9(2), 113–123.

[11] F. Ilahi, dan N. Fadilaturrohmah, (2021), Model SEIR Untuk Penyebaran Penyakit Hepatitis C Dengan Pengobatan Pada Populasi Terinfeksi

Kronis, *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, 5(1), 19−28.

[12] M. Mukhlis, F. Saumi, dan U. Nabilla, (2021), Analisis Penyebaran Penyakit Filariasis Menggunakan Model SEIR Di Provinsi Sumatera Utara, *Jurnal Absis : Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, 3(2), 267–277.