ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA DIPERUMUM UNTUK SAMPEL TERSENSOR TIPE II DAN TIPE I

Eka Sahafati[1], Wayan Somayasa[1], Herdi Budiman[1] dan Muhammad Kabil Djafar[1]
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
E-mail: ekasahafati@gmail.com

ABSTRAK

Analisis uji hidup merupakan salah satu kumpulan dari prosedur statistika untuk analisis data dimana variabelnya adalah waktu sampai terjadinya kejadian. Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan penduga dari distribusi Gamma diperumum untuk sampel tersensor tipe II dan tipe I.Estimasi parameter adalah pendugaan karakteristik populasi (parameter) dengan menggunakan karakteristik sampel (statistik).Dalam penelitian ini, untuk mengestimasi parameter digunakan metode maksimum likelihood. Karena turunan pertama fungsi log-likelihood nonlinear, tidak dapat diselesaikan secara analitik, maka dilakukan pendekatan numerik yaitu dengan metode Newton-Raphson.Dengan menggunakan software R, untuk sampel tersensor tipe II menggunakan data waktu hidup marmut diperoleh $\hat{\alpha} = 1{,}54827$, $\hat{\beta} = 1{,}44184$ dan $\hat{\theta} = 139{,}52374$. Untuk sampel tersensor tipe I menggunakan data waktu kegagalan sistem pendingin udara pesawat terbang diperoleh $\hat{\alpha} = 0{,}49999$,$\hat{\beta} = 1.25575$dan $\hat{\theta} = 26.05336$.

Kata Kunci: Distribusi Gamma, Distribusi Gamma Diperumum, Sampel Tersensor Tipe II dan Tipe I, Estimasi Parameter, Metode Maksimum Likelihood, Metode Newton-Raphson.

ABSTRACT

Lifetime test analysis is a collection of statistical procedures for data analysis where the variable is the time to failure. The purpose of this study is to obtain an estimation procedure for the parameters of Generalized Gamma distribution based on type II and type I censored samples. In this study, we propose maximum likelihood method to estimate the parameters. Since the first derivative of the loglikelihood function cannot be solved analytically, a numerical approach is used, namely the Newton-Raphson method. By using R software, for the type II censored samples using the survival time guinea pig data, it was obtained $\hat{\alpha} = 1{,}5483$, $\hat{\beta} = 1{,}4418$ dan $\hat{\theta} = 139{,}5237$. For the type I censored samples using the failure times of the air conditioning system of an airplane data, it was obtained $\hat{\alpha} = 0{,}49999$,$\hat{\beta} = 1.25575$dan $\hat{\theta} = 26.05336$.

Keywords: Gamma Distribution, Generalized Gamma Distribution, Type I and Type II Censored Samples, Parameter Estimation, Maximum Likelihood Estimate, Newton-Raphson Method.

1. Pendahuluan

Dalam bidang matematika terdapat cabang statistika yang telah berkembang pesat dengan adanya penemuan-penemuan alat analisis yang dapat digunakan untuk menganalisis suatu permasalahan, salah satunya adalah analisis uji hidup. Analisis uji hidup merupakan metode yang digunakan untuk menganalisis peluang kelangsungan hidup, kematian atau suatu peristiwa lainnya pada periode waktu tertentu. Analisis uji hidup sering digunakan dalam bidang teknik, biologi, kedokteran, dan lain-lain. Penelitian-penelitian tersebut biasanya menggunakan data yang berkaitan dengan waktu tahan hidup dari suatu individu. Analisis uji hidup mencakup berbagai teknik statistik yang berguna untuk menganalisis berbagai macam variabel random positif. Variabel random positif pada analisis uji hidup berupa *survival time* (waktu tahan hidup) dan *failure time* (waktu kegagalan).Tujuan analisis uji hidup adalah menentukan model yang dapat dipakai untuk menggambarkan model distribusi peluang suatu variabel uji hidup serta melakukan inferensi terhadap parameter-parameter model (Lawless, 1982).

Analisis uji hidup pada suatu objek penelitian menghasilkan data waktu hidup. Data uji hidup dapat berupa masa pakai produk di pasar, seperti saat produk berhasil dioperasikan atau waktu produk dioperasikan sebelum gagal. Masa pakai ini dapat diukur dalam jam, mil, siklus kegagalan, siklus stres, atau metrik lainnya yang dapat digunakan untuk mengukur masa pakai produk(Murti dkk, 2012).

Data waktu hidup yang diperoleh dari percobaan dapat berbentuk data lengkapdiperoleh jika seluruh unit dalam percobaan diuji sampai terjadi kerusakan (*failure*) dan data tersensor diperoleh jika tidak seluruh unit/komponen mengalami kerusakan sampai dengan kondisi pengamatan yang ditentukan, dengan kata lain masih terdapat unit/komponen yang hidup saat terjadi penyensoran (Solih dkk, 2017).

Dalam analisis uji hidup dikenal adanya penyensoran. Penyensoran merupakan suatu hal yang membedakan analisis uji hidup dengan analisis statistik lainnya. Penyensoran dilakukan untuk mengatasi beberapa permasalahan dalam suatu analisis, misalnya dalam suatu penelitian dibutuhkan waktu yang lama untuk mendapatkan data yang lengkap sampai objek pengamatan mengalami suatu kejadian yang diinginkan. Terdapat tiga penyensoran pada analisis uji hidup, yaitu penyensoran kanan, penyensoran kiri dan penyensoran interval. Dalam Analisis data uji hidup terdapat tiga fungsi yaitu fungsi kumulatif, fungsi survival dan fungsi hazard. Untuk menganalisis data uji hidup dengan data tersensor diperlukan asumsi tertentu tentang distribusi populasinya. Beberapa distribusi parametrik yang populer dan dapat digunakan untuk menganalisis model uji hidup adalah distribusi weibull, distribusi eksponensial, distribusi gamma, distribusi log-logistik, distribusi generalized gamma dan lain-lain. Salah satu distribusi waktu ketahanan hidup dalam industri yang dapat digunakan adalah distribusi generalized gamma atau distribusi gamma yang diperumum.

Distribusi generalized gamma atau distribusi gamma diperumum merupakan perumuman dari distribusi gamma. Distribusi gamma merupakan salah satu keluarga distribusi peluang kontinu yang biasa digunakan dalam pemodelan data kelangsungan hidup. Akan tetapi distribusi gamma terkadang tidak selalu tepat untuk mengemas data kelangsungan hidup dalam suatu model peluang untuk dapat mengatasinya maka dibutuhkan suatu perumuman dari distribusi gamma untuk dapat digunakan dalam setiap keadaan data tersebut yaitu yang biasa disebut distribusi generalized gamma atau distribusi gamma yang diperumum. Distribusi gamma diperumum memiliki model khusus yaitu distribusi Eksponensial, Weibull, dan Gamma (Stacy, 1962).

Dalam penelitian ini akan dilakukan estimasi parameter distribusi gamma diperumum dan aplikasinya. Estimasi parameter merupakan suatu metode yang digunakan untuk memprediksi karakteristik suatu populasi berdasarkan sampel. Parameter adalah suatu konstanta yang tidak diketahui yang menggambarkan karakteristik suatu populasi, oleh karena itu untuk mengetahuinya dilakukan estimasi (pendugaan) terhadap parameter tersebut melalui data sampel. Ada beberapa metode estimasi parameter yang sering digunakan yaitu metode momen, metode kuadrat terkecil, metode Bayes dan *metode Maximum likelihood estimator* (MLE).

Metode estimasi parameter yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode *maximum likelihood estimator* (MLE). Metode MLE adalah metode yang paling sering digunakan dalam mengestimasi parameter. Pada intinya metode ini adalah mendapatkan estimasi parameter dengan cara memaksimumkan fungsi likelihood.Fungsi likelihood adalah fungsi probabilitas bersama dari $X_1, X_2, \cdots, X_n,\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ dimana dianggap sebagai fungsi dalam parameter θ.

Secara umum, parameter diberi notasi θ dan penduganya dinotasikan dengan $\hat{\theta}$. Estimator yang diperoleh dalam mengestimasi parameter-parameter dikatakan sebagai estimator yang baik apabila memiliki sifat, yaitu estimator yang tidak bias, estimator yang efisien dan dan estimator yang konsisten (Fatehkurohman, 2021).

Paper ini ditulis dengan susunan sebagai berikut, pada bagian 2 membahas tentang kajian pustaka, bagian 3 membahas tentang hasil dan pembahasan dan bagian 4 penutup.

2. Kajian Pustaka

2.1 Distribusi Gamma Diperumum

Distribusi generalized gamma atau distribusi gamma diperumum merupakan perumuman dari distribusi gamma. Distribusi gamma diperumum memiliki tiga paramater yaitu parameter bentuk (α, β) dan parameter skala (θ)(Stacy, 1962).

Misalkan T berdistribusi gamma diperumum tiga parameter atau dinotasikan $T \sim GG(\alpha, \beta, \theta)$, maka fungsi probabilitas (pdf) dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^{\beta\alpha - 1}}{\theta^{\beta\alpha}} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}};\ x, \alpha, \beta, \theta > 0 \qquad (2.1)$$

Berdasarkan Persamaan (2.1) fungsi distribusi kumulatif dari distribusi gamma diperumum dapat ditulis sebagai.

$$F(x; \alpha, \beta, \theta) = \int_0^x \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^{\beta\alpha - 1}}{\theta^{\beta\alpha}} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}} dx$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)\theta^{\beta\alpha}} \int_0^x x^{\beta\alpha - 1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}} dx$$

Karena banyaknya parameter dalam fungsi integral, maka perlu disederhanakan sebagai berikut:

$$F(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}} u^{\alpha - 1} e^{-u}\, du \quad ; \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta} > 0$$

atau

$$F(x; \alpha, \beta, \theta) = 1 - \frac{\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)} \qquad (2.2)$$

Nilai harapan dari distribusi gamma diperumum adalah:

$$E[x] = \frac{\theta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)$$

Ragam distribusi gamma diperumum adalah:

$$Var(x) = \frac{\theta^2}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma\left(\alpha + \frac{2}{\beta}\right) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\right)^2\right]$$

Menurut (Lawless, 1982) fungsi survival didefinisikan sebagai peluang suatu individu dapat bertahan hidup sampai waktu t. Jika T merupakan variabel acak dari waktu hidup suatu individu dalam interval $[0, \infty)$, maka fungsi survival $S(t)$ dapat dinyatakan sebagai:

$$S(t) = P(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(t)\, dt \quad (2.3)$$

Dengan demikian diperoleh persamaan yang menyatakan hubungan antara fungsi survival dan fungsi distribusi kumulatif, yaitu

$$S(t) = 1 - F(t) \quad (2.4)$$

Berdasarkan Persamaan (2.3) maka fungsi survival distribusi gamma diperumum untuk sampel tersensor dinyatakan sebagai berikut.

$$S(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}}^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-u}\, du \quad (2.5)$$

Berdasarkan Persamaan (2.4) yang menyatakan hubungan antara fungsi survival dan fungsi distribusi kumulatif, maka

$$S(t) = 1 - F(t) = \frac{\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)} \quad (2.6)$$

Menurut (Lawless, 1982) fungsi hazard didefinisikan sebagai kelajuan suatu individu mengalami kejadian dalam interval waktu dari t sampai $t + \Delta t$ dengan syarat individu tersebut masih bertahan hidup sampai dengan waktu t, dinyatakan sebagai berikut.

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t}\right] = F^{'}(t) \frac{1}{s(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} \quad (2.7)$$

Berdasarkan Persamaan (2.7) fungsi hazard diperoleh dari $\frac{f(t)}{S(t)}$. Dengan menggunakan Persamaan (2.1) dan (2.5), maka fungsi hazard distribusi gamma diperumum adalah sebagai berikut.

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{\frac{\beta x^{\beta\alpha - 1}}{\theta^{\beta\alpha}} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}}{\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right)} \quad (2.8)$$

2.2 Penyensoran

Penyensoran dilakukan untuk memperpendek waktu percobaan karena dalam mengukur waktu kematian individu kadang-kadang diperlukan waktu yang lama dan biaya yang besar. Pengamatan tidak tersensor merupakan waktu tahan hidup yang dicatat dari individu yang mati selama waktu percobaan, yaitu waktu dari awal hingga mengalami kematian. Sedangkan pengamatan tersensor merupakan pengamatan waktu tahan hidup suatu individu yang tidak diketahui secara pasti, sehingga pengamatannya harus dibatasi oleh waktu (Murti dkk, 2012).

Menurut (Lawless, 1982)data dikatakan tersensor jika lamanya hidup seseorang yang diobservasi hanya terjadi pada waktu yang telah ditentukan, sedang info yang ingin diketahui tidak terjadi pada interval tersebut, dengan demikian tidak diperoleh informasi apapun yang diinginkan selama interval pengamatan. Dalam analisis uji hidup penyensoran yang sering digunakan dalam ekperimen uji hidup adalah panyensoran kanan. Ada dua tipe penyensoran kanan yaitu:

2.2.1 Penyensoran Tipe II

Menurut (Lawless, 1982) pada penyensoran tipe II, pengamatan diakhiri setelah sejumlah kegagalan yang telah ditetapkan diperoleh, atau dapat dikatakan banyaknya kegagalan adalah tetap dan waktu pengamatan adalah acak. Pada sensor kanan tipe II, jumlah individu pada saat awal ditentukan dan waktu penelitian ditentukan sampai terjadinya kematian dengan jumlah tertentu. Data tersensor tipe II adalah suatu data waktu hidup yang terdapat r buah observasinya dalam sampel random yang berukuran n dengan $(1 \leq r \leq n)$. Dalam data tersensor tipe II, tardapat r pengamatan dari n sampel yang diamati, dan eksperimen akan dihentikan setelah kegagalan ke-r yang terjadi sebelum waktu t_i. Data terdiri dari r tahan hidup terkecil $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \cdots \leq T_{(r)}$ dari sampel acak yang terdiri dari n tahan hidup $T_1, T_2, \cdots T_n$. Fungsi densitas peluang bersama dari $T_1, T_2, \cdots T_n$ adalah:survival $S(t)$, serta merupakan sampel terurut, maka fungsi kepadatan peluang bersama dari $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(r)}$ adalah sebagai berikut.

$$\frac{n!}{(n-r)!} f(t_{(1)}) \dots f(t_{(r)}) [s(t_{(r)})]^{n-r} \quad (2.9)$$

Berdasarkan Persamaan (2.9) maka fungsi likelihood distribusi gamma diperumum berdasarkan sampel tersensor tipe II adalah:

$$L = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\left(\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\theta^{\beta\alpha}}\right)^{r} \left(\prod_{i=1}^{r} t_{(i)}{}^{\beta\alpha - 1}\right) e^{-\frac{1}{\theta^{\beta}} \sum_{i=1}^{r} t_{(i)}{}^{\beta}}\right] \left[\frac{\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{t_{(r)}}{\theta}\right)^{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)}\right]^{n-r} \quad (2.10)$$

Maka fungsi logaritma likelihood adalah sebagai berikut.

$$\ln L(\alpha, \beta, \theta) = \ln \frac{n!}{(n-r)!} + r \ln \beta - r\beta\alpha \ln \theta - r \ln \Gamma(\alpha) + (\beta\alpha - 1) \sum_{i=1}^{r} \ln t_{(i)} - \frac{1}{\theta^{\beta}} \sum_{i=1}^{r} t_{(i)}^{\beta} - (n-r) \ln \Gamma(\alpha) + (n-r) \ln \Gamma\left(\alpha, \left(\frac{t_{(r)}}{\theta}\right)^{\beta}\right) \quad (2.11)$$

2.2.2 Penyensoran Tipe I

Menurut (Lawless, 1982) pada penyensoran tipe I, penelitian diakhiri apabila waktu pengamatan yang ditentukan tercapai. Jika waktu pengamatan sama untuk semua unit maka dikatakan penyensoran tunggal. Jika pengamatan untuk setiap unit berbeda maka dapat dikatakan penyensoran ganda.

Karakteristik penyensoran tipe I adalah bahwa kegagalan adalah acak.

Misalkan T_1, $T_2, \cdots T_n$ adalah waktu hidup dari n individu dan waktu sensornya adalah L_i. Suatu komponen dikatakan terobservasi jika $T_i \leq L_i$ dan observasi hanya dilakukan pada $t_i = \min(T_i, L_i)$. Sehingga variabel yang menunjukkan bahwa komponen telah mati yaitu:

$$\delta_i = \begin{cases} 1, jika\, T_i \leq L_i \\ 0, jika\, T_i > L_i \end{cases}$$

δ_i menunjukkan apakah waktu T_i tersensor atau tidak, dan $t_i = T_i$ jika terobservasi, dan $t_i = L_i$ jika tidak terobservasi. Fungsi kepadatan peluangnya bersama dari t_i dan δ_i adalah

$$f(t_i)^{\delta_i} S(L_i)^{1-\delta_i} \qquad (2.12)$$

Dari Persamaan (2.12) maka fungsi likelihoodnya adalah:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f\left(t_{(i)}\right)^{\delta_{(i)}} S\left(L_{(i)}\right)^{1-\delta_{(i)}} \qquad (2.13)$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.13) fungsi likelihood distribusi gamma diperumum tersensor tipe I adalah sebagai berikut.

$$L = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{t_{(i)}{}^{\beta\alpha-1}}{\theta^{\beta\alpha}} e^{-\left(\frac{t_{(i)}}{\theta}\right)^{\beta}} \right]^{\delta_{(i)}} \left[\frac{\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{L_{(i)}}{\theta}\right)^{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)} \right]^{1-\delta_{(i)}}$$

$$= \left(\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\theta^{\beta\alpha}} \right)^{r} \left[\prod_{i=1}^{n} t_{(i)}{}^{\beta\alpha-1} \right] e^{-\frac{1}{\theta^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} t_{(i)}{}^{\beta}} \qquad (2.14)$$

Misalkan $r = \sum \delta_{(i)}$

maka fungsi logaritma likelihood adalah sebagai berikut.

$$\ln L(\alpha, \beta, \theta) = r \ln \beta - r\beta\alpha \ln \theta - r \ln \Gamma(\alpha) + (\beta\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln t_{(i)} - \frac{1}{\theta^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} t_{(i)}^{\beta} \qquad (2.15)$$

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Estimasi Parameter dari Distribusi Gamma Diperumum

Pada bagian ini akan dibahas estimasi parameter distribusi gamma diperumum berdasarkan sampel tersensor tipe II dan tipe I menggunakan metode estimasi maksimum likelihood.

3.1.1 Sampel Tersensor Tipe II

Berdasarkan Persamaan (2.10) fungsi likelihood distribusi gamma diperumum berdasarkan sampel tersensor tipe II adalah sebagai berikut.

$$L = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\left(\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\theta^{\beta\alpha}} \right)^{r} \left(\prod_{i=1}^{r} t_{(i)}{}^{\beta\alpha-1} \right) e^{-\frac{1}{\theta^{\beta}} \sum_{i=1}^{r} t_{(i)}{}^{\beta}} \right] \left[\frac{\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{t_{(i)}}{\theta}\right)^{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)} \right]^{n-r}$$

Maka logaritma fungsi likelihood adalah:

$$\ln L(\alpha, \beta, \theta) = \ln \frac{n!}{(n-r)!} + r \ln \beta - r\beta\alpha \ln \theta - r \ln \Gamma(\alpha) + (\beta\alpha - 1) \sum_{i=1}^{r} \ln t_{(i)} - \frac{1}{\theta^{\beta}} \sum_{i=1}^{r} t_{(i)}^{\beta} - (n-r) \ln \Gamma(\alpha) + (n-r) \ln \Gamma\left(\alpha, \left(\frac{t_{(r)}}{\theta}\right)^{\beta}\right)$$

Berdasarkan logaritma fungsi likelihood untuk sampel tersensor tipe II maka penduga maksimum likelihood α, β dan θ diperoleh dari penyelesaian sistem persamaan $\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial \beta} = 0$ dan $\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial \theta} = 0$.

Berikut ini adalah turunan pertama terhadap parameter α, β dan θ.

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \theta)}{\partial \alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow -r\beta \ln \theta + \beta \sum_{i=1}^{r} \ln t_{(i)} - n\psi(\alpha) + \frac{(n-r)}{\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{t_{(i)}}{\theta}\right)^{\beta}\right)} \times \frac{\partial\left(\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{t_{(i)}}{\theta}\right)^{\beta}\right)\right)}{\partial \alpha} = 0 \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \theta)}{\partial \beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{\beta} - r\alpha \ln \theta + \alpha \sum_{i=1}^{n} \ln t_{(i)} - \frac{\sum_{i=1}^{r} \ln t_{(i)}\, t_{(i)}{}^{\beta} - \sum_{i=1}^{r} t_{(i)}{}^{\beta} \ln \theta}{\theta^{\beta}} + \frac{(n-r)}{\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{t_{(i)}}{\theta}\right)^{\beta}\right)} \times \frac{\partial\left(\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{t_{(i)}}{\theta}\right)^{\beta}\right)\right)}{\partial \beta} = 0 \qquad (4.2)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{r\beta\alpha}{\theta} + \beta\theta^{-\beta-1} \sum_{i=1}^{n} t_{(i)}{}^{\beta} + \frac{(n-r)}{\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{t_{(i)}}{\theta}\right)^{\beta}\right)} \times \frac{\partial\left(\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{t_{(i)}}{\theta}\right)^{\beta}\right)\right)}{\partial \theta} = 0 \qquad (4.3)$$

Persamaan (4.1), (4.2) dan (4.3) merupakan sistem persaamaan non linear. Maka akan digunakan metode numerik yaitu metode Newton-Rapshon untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Dalam iterasi Newton-Rapshon diperlukan matriksHessianyang elemen-elemennya terdiri dari turunan kedua fungsi logaritma likelihood yang dievaluasi pada titik $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ dan $\hat{\theta}$.

Menurut (Seber dan Wild, 2003) matriks Hessian diperoleh seperti pada persamaan berikut.

$$H=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha\partial\beta} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha\partial\theta}\\ \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta\partial\theta}\\ \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\theta\partial\alpha} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\theta\partial\beta} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\theta^2}\end{bmatrix}$$

Sehingga iterasi metode Newton-Rapshon tiga variabel sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_{i+1}\\ \hat{\beta}_{i+1}\\ \hat{\theta}_{i+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_{i}\\ \hat{\beta}_{i}\\ \hat{\theta}_{i}\end{pmatrix}-\left[\left(H(\hat{\alpha}_{(i)},\hat{\beta}_{(i)},\hat{\theta}_{(i)})\right)^{-1}g(\hat{\alpha}_{(i)},\hat{\beta}_{(i)},\hat{\theta}_{(i)})\right]$$

Di mana

$$g(\hat{\alpha}_{(i)},\hat{\beta}_{(i)},\hat{\theta}_{(i)})=\begin{bmatrix}\frac{\partial(\ln L(\alpha,\beta,\theta))}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial(\ln L(\alpha,\beta,\theta))}{\partial\beta}\\ \frac{\partial(\ln L(\alpha,\beta,\theta))}{\partial\theta}\end{bmatrix}$$

$$(H)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha\partial\beta} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha\partial\theta}\\ \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta\partial\theta}\\ \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\theta\partial\alpha} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\theta\partial\beta} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\theta^2}\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai penduga parameter α, βdan θ menggunakan metode iterasi Newton-Rapshon pada data tersensor tipe II yang berasal dari populasi berdistribusi gamma diperumum yang diselesaikan dengan bantuan *software* R.

3.1.2 Sampel Tersensor Tipe I

Fungsi likelihood distribusi gamma diperumum berdasarkan sampel tersensor tipe I dapat dilihat pada Persamaan (2.14) sebagai berikut.

$$L(\alpha,\beta,\theta)=\left(\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\theta^{\beta\alpha}}\right)^r\left[\prod_{i=1}^{n}t_{(i)}{}^{\beta\alpha-1}\right]e^{-\frac{1}{\theta^\beta}\sum_{i=1}^n t_{(i)}{}^\beta}$$

Maka logaritma fungsi likelihood seperti pada Persamaan (2.15) sebagai berikut.

$$\ln(\alpha,\beta,\theta)=r\ln\beta-r\beta\alpha\ln\theta-r\ln\Gamma(\alpha)+(\beta\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln t_{(i)}-\frac{1}{\theta^\beta}\sum_{i=1}^{n}t_{(i)}^\beta$$

Berdasarkan fungsi logaritma likelihood untuk sampel tersensor tipe I maka penduga maksimum likelihood α, β dan θ diperoleh dari penyelesaiansistem persamaan $\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha}=0$, $\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta}=0$ dan$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\theta}=0$.

Berikut ini adalah turunan pertama terhadap parameter α, β dan θ.

$$\frac{\partial(\ln L(\alpha,\beta,\theta))}{\partial\alpha}=0$$

$$\Leftrightarrow -r\beta\ln\theta-r\psi(\alpha)+\beta\sum_{i=1}^{n}\ln t_{(i)}=0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial(\ln L(\alpha,\beta,\theta))}{\partial\beta}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{\beta}-r\alpha\ln\theta+\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln t_{(i)}-\frac{\sum_{i=1}^n t_{(i)}{}^\beta\ln t_{(i)}-\ln\theta\sum_{i=1}^n t_{(i)}{}^\beta}{\theta^\beta}=0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial(\ln L(\alpha,\beta,\theta))}{\partial\theta}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{r\beta\alpha}{\theta}+\beta\theta^{-(\beta+1)}\sum_{i=1}^{n}t_{(i)}{}^\beta=0 \quad (4.6)$$

Dari Persamaan (2.36) didapatkan penyelesaian untuk θ, sebagai berikut:

$$-\frac{r\beta\alpha}{\theta}+\beta\theta^{-\beta-1}\sum_{i=1}^{n}t_{(i)}{}^\beta=0$$

$$\frac{r\beta\alpha}{\theta}=\beta\theta^{-\beta-1}\sum_{i=1}^{n}t_{(i)}{}^\beta$$

$$r\alpha=\beta\theta^{-\beta}\sum_{i=1}^{n}t_{(i)}{}^\beta$$

$$\theta^\beta=\frac{1}{r\alpha}\sum_{i=1}^{n}t_{(i)}{}^\beta$$

$$\theta=\left[\frac{1}{r\alpha}\sum_{i=1}^{n}t_{(i)}{}^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (4.7)$$

Persamaan (4.7) disubtitusi ke Persamaan (4.4) dan (4.5) seperti pada persamaan berikut:

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=-r\,ln\left[\frac{1}{r\alpha}\sum_{i=1}^{n}t_{(i)}{}^\beta\right]-r\psi(\alpha)+\beta\sum_{i=1}^{n}\ln t_{(i)}{}^\beta=0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\frac{r}{\beta}-r\alpha\left[\frac{\sum_{i=1}^n t_{(i)}{}^\beta\ln t_{(i)}}{\sum_{i=1}^n t_{(i)}{}^\beta}\right]+\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln t_{(i)}=0 \quad (4.9)$$

Dari Persamaan (4.8) dan (4.9) MLE untuk α dan β tidak dapat dihitung secara analitik, karena (4.8) dan (4.9) merupakan sistem persaamaan nonlinear. Maka akan digunakan metode numerik yaitu metode Newton-Rapshon untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Dalam iterasi Newton-Rapshon diperlukanmatriks Hessian yang elemen-elemennya terdiri dari turunan kedua fungsi logaritma likelihood yang dievaluasi pada titik $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$.

Menurut (Seber dan Wild, 2003) matriks Hessian diperoleh seperti pada persamaan berikut.

$$H(\hat{a},\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha\partial\beta} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta^2} \end{bmatrix}_{\substack{\alpha=\hat{\alpha}_{(i)} \\ \beta=\hat{\beta}_{(i)}}}$$

Sehingga iterasi metode Newton-Rapshon dua variabel sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{(i+1)} \\ \hat{\beta}_{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{(i)} \\ \hat{\beta}_{(i)} \end{pmatrix} - \left[\left(H(\hat{\alpha}_{(i)},\hat{\beta}_{(i)})\right)^{-1} g(\hat{\alpha}_{(i)},\hat{\beta}_{(i)})\right]$$

di mana

$$g(\hat{\alpha}_{(i)},\hat{\beta}_{(i)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln \mathrm{L}(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial \ln \mathrm{L}(\alpha,\beta)}{\partial\beta} \end{bmatrix}$$

$$\left(H(\hat{\alpha}_{(i)},\hat{\beta}_{(i)})\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha\partial\beta} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta^2} \end{bmatrix}_{\substack{\alpha=\hat{\alpha}_{(i)} \\ \beta=\hat{\beta}_{(i)}}}\right)^{-1}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai penduga parameter α, βdan θ menggunakan metode iterasi Newton-Rapshon pada data tersensor tipe I yang berasal dari populasi berdistribusi gamma diperumum yang diselesaikan dengan bantuan *software* R.

3.2 Analisis Data

Pada bagian ini akan diberikan aplikasi dari prosedur estimasi parameter distribusi gamma diperumum berdasarkan sampel tersensor tipe II dan tipe I menggunakan metode estimasi maksimum *likelihood*, kemudian dengan sifat asimtotik dari MLE akan ditentukan estimasi intervalnya.

3.2.1 Analisis Data untuk Sampel TersensorTipe II

Data yang dianalisa merupakan hasil pengukuran terhadap waktu bertahan hidup marmut sejak terinfeksi *virulent tubercle Bacilli* yang diukur dalam satuan hari. Data ini bersumber dari jurnal On Modeling Of Lifetime Data Using Three-Parameter Generalized Lindley and Generalized Gamma Distribution (Shanker dkk., 2016). Banyaknya marmut yang diamati adalah 85 ekor. Pengamatan dihentikan jika telah terdapat sebanyak 72 ekor marmut yang mati. Marmut yang masih bertahan hidup dikatakan tersensor.Data hasil percobaan ditampilkan pada Tabel 4.1.

Tabel 3.1 Data Waktu Bertahan Hidip Marmut

Item ke	t	Item ke	t	Item ke	t
1	10	25	116	49	197
2	33	26	120	50	202
3	44	27	121	51	213
4	56	28	122	52	215
5	59	29	122	53	216
6	72	30	124	54	222
7	74	31	130	55	230
8	77	32	134	56	231
9	92	33	136	57	240
10	93	34	139	58	245
11	96	35	144	59	251
12	100	36	146	60	253
13	100	37	153	61	254
14	102	38	159	62	254
15	105	39	160	63	278
16	107	40	163	64	293
17	107	41	163	65	327
18	108	42	168	66	342
19	108	43	171	67	347
20	108	44	172	68	361
21	109	45	176	69	402
22	112	46	183	70	432
23	113	47	195	71	458
24	115	48	196	72	555

Berdasarkan data pada Tabel 4.1 akan ditentukan penduga parameter α, βdan θ dari distribusi gamma diperumum berdasarkan penyensoran tipe II. Pendugaan parameter ini dilakukan dengan metode iterasi Newton-Rapshon yang diselesaikan dengan bantuan software R. hasil perhitungan ditampilkan pada lampiran (3), nilai estimasi untuk α, β dan θ diperoleh setelah melakukan 20 kali iterasi, di mana nilai $\hat{\alpha} = 1{,}54827, \hat{\beta} = 1{,}44184$ dan $\hat{\theta} = 139{,}52374$.

Selanjutnya estimasi interval untuk parameter α, β dan θ dapat diturunkan secara asimtotik dengan menggunakan sifat asimtotik dari penduga maksimum likelihood. Maka berlaku:

$(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\theta}) \sim N_3\left[(\alpha,\beta,\theta), {I_0}^{-1}\right]$(4.10)

Di mana I_0 adalah matriks informasi yang diberikan oleh persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha^2} & -\frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha\partial\beta} & -\frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha\partial\theta} \\ -\frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta\partial\alpha} & -\frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta^2} & -\frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta\partial\theta} \\ -\frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\theta\partial\alpha} & -\frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\theta\partial\beta} & -\frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta,\theta)}{\partial\theta^2} \end{bmatrix}$$

Akan ditentukan estimasi interval untuk α, β dan θ dari data waktu bertahan hidup marmut yang terinfeksi *virulent tubercle Bacilli*. Diperoleh matriks informasi dan inversnya sebagai berikut.

$$I_0 = \begin{pmatrix} 76.19403 & -4.75612 & 0.74405 \\ -4.75612 & 94.08349 & -0.59216 \\ 0.74405 & -0.59216 & 0.11905 \end{pmatrix}$$

$$I_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0.07356 & -0.03671 & -6.42302 \\ -0.03671 & 0.03379 & 3.97507 \\ -6.42302 & 3.97507 & 683.15667 \end{pmatrix}$$

diperoleh $\left(I_0^{-1}\right)_{11} = 0.07356$, $\left(I_0^{-1}\right)_{22} = 0.03379$ dan $\left(I_0^{-1}\right)_{33} = 683.15667$. Misalkan diambil $\gamma = 5\%$ dimana $\hat{\alpha} = 1.54827$, $\hat{\beta} = 1.44184$, dan $\hat{\theta} = 139.52374$ maka

$$\Leftrightarrow P\left\{\hat{\alpha} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{11}} \leq \alpha \leq \hat{\alpha} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{11}}\right\} = 1 - \gamma$$

$$\Leftrightarrow P\left\{1.54827 - z_{0.975}\sqrt{0.07356} \leq \alpha \leq 1.54827 - z_{0.025}\sqrt{0.07356}\right\} = 95\%$$

$$\Leftrightarrow P\{1.01669 \leq \alpha \leq 2.07985\} = 95\%$$

Jadi, interval kepercayaan dua sisi $(1-\gamma)100\%$ untuk α pada sampel tersensor tipe II adalah $(1.01669, 2.07985)$. Kemudian interval kepercayaan untuk β

$$\Leftrightarrow P\left\{\hat{\beta} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(I_0^{-1}\right)_{22}} \leq \beta \leq \hat{\beta} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(I_0^{-1}\right)_{22}}\right\} = 1 - \gamma$$

$$\Leftrightarrow P\left\{1.44184 - z_{0.975}\sqrt{0.03379} \leq \beta \leq 1.44184 - z_{0.025}\sqrt{0.03379}\right\} = 95\%$$

$$\Leftrightarrow P\{1.06028 \leq \beta \leq 1.8234\} = 95\%$$

Jadi, interval kepercayaan dua sisi $(1-\gamma)100\%$ untuk β pada sampel tersensor tipe II adalah $(1.06028, 1.8234)$. Selanjutnya interval kepercayaan untuk θ

$$\Leftrightarrow P\left\{\hat{\theta} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(I_0^{-1}\right)_{33}} \leq \theta \leq \hat{\theta} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(I_0^{-1}\right)_{33}}\right\} = 1 - \gamma$$

$$\Leftrightarrow P\left\{139.52374 - z_{0.975}\sqrt{683.15667} \leq \theta \leq 139.52374 - z_{0.025}\sqrt{683.15667}\right\} = 95\%$$

$$\Leftrightarrow P\{88.29574 \leq \theta \leq 190.75174\} = 95\%$$

Jadi, interval kepercayaan dua sisi $(1-\gamma)100\%$ untuk θ pada sampel tersensor tipe II adalah $(88.29574, 190.75174)$.

Selain memperoleh nilai $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, dan $\hat{\theta}$dapat diperoleh juga estimasi dari fungsi survival dan fungsi hazard distribusi gamma diperumum.

Misalkan diberikan sembarang t dalam satuan waktu hari, maka fungsi survival (tahan hidup) marmut dapat diestimasi dengan fungsi $\hat{s}(t)$ sebagai berikut.

$$\hat{S}(0) = \frac{1}{\Gamma(1.5483)}\int_{\left(\frac{0}{139.5237}\right)^{1.4418}}^{\infty} u^{1.5483-1}e^{-u}\,du = 1$$

$$\hat{S}(10) = \frac{1}{\Gamma(1.5483)}\int_{\left(\frac{10}{139.5237}\right)^{1.4418}}^{\infty} u^{1.5483-1}e^{-u}\,du = 0.998$$

$$\hat{S}(15) = \frac{1}{\Gamma(1.5483)}\int_{\left(\frac{15}{139.5237}\right)^{1.4418}}^{\infty} u^{1.5483-1}e^{-u}\,du = 0.995$$

Angka tersebut menyatakan bahwa probabilitas marmut yang terinfeksi virus untuk mampu bertahan selama 10 hari adalah sebesar 99,8%. Sedangkan probabilitas marmut yang terinfeksi virus untuk mampu bertahan selama 15 hari adalah sebesar 99,5%. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin lama marmut terinfeksi virus maka peluang atau kemampuan marmut bertahan hidup akan semakin kecil.

Misalkan diberikan $t = 10$ dan $t = 15$, maka fungsi hazard dari waktu hidup marmut adalah

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{\frac{\beta t^{\beta\alpha-1}}{\theta^{\beta\alpha}}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}}}{\Gamma\left(\alpha, \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right)}$$

$$h(10) = \frac{f(10)}{S(10)} = \frac{\frac{1.4418(10)^{1.4418(1.5483)-1}}{(139.5237)^{1.4418(1.5483)}}e^{-\left(\frac{10}{139.5237}\right)^{1.4418}}}{\Gamma\left(1.5483, \left(\frac{10}{139.5237}\right)^{1.4418}\right)} = 0.0044$$

$$h(15) = \frac{f(15)}{S(15)} = \frac{\frac{1.4418(15)^{1.4418(1.5483)-1}}{(139.5237)^{1.4418(1.5483)}}e^{-\left(\frac{15}{139.5237}\right)^{1.4418}}}{\Gamma\left(1.5483, \left(\frac{15}{139.5237}\right)^{1.4418}\right)} = 0.0108$$

Angka tersebut menyatakan bahwa probabilitas marmut mengalami kegagalan selama 10 hari adalah sebesar 0,44%. Sedangkan probabilitas marmut mengalami kegagalan selama 15 hari adalah sebesar 1,08%. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin lama waktu hidup marmut yang terinfeksi *virulent tubercle Bacilli*, maka akan semakin tinggi probabilitas kegagalannya.

3.2.2 Analisis Data untuk Sampel Tersensor Tipe I

Data yang dianalisa merupakan waktu kegagalan sistem pendingin udara pesawat terbang yang diukur dalam satuan minggu. Data ini bersumber dari jurnal On Modeling Of Lifetime Data Using Three-Parameter Generalized Lindley and Generalized Gamma Distribution (Shanker dkk., 2016). Dilakukan pengamatan terhadap 35 sistem pendingin udara pesawat terbang dengan waktu sensor yang tunggal yaitu selama $L_i = 261$ minggu. sistem pendingin udara yang masih hidup setelah 261 minggu dikatakan tersensor, data hasil percobaanditampilkan pada tabel 4.2. Pengamatan yang diberi tanda bintang adalah item yang tersensor, yaitu sebanyak 6 item. Sehingga jumlah waktu kegagalan sistem pendingin udara pesawat terbang yang dapat diamati yaitu sebanyak $r = 29$.

Tabel 3.2 Data waktu kegagalan sistem pendingin udara pesawat terbang

Item ke	Waktu (Minggu)	Item ke	Waktu (Minggu)
1	3	19	62
2	5	20	71
3	7	21	71
4	11	22	87
5	11	23	90
6	11	24	95
7	12	25	120
8	14	26	120
9	14	27	225
10	14	28	246
11	16	29	261
12	16	30	261*
13	20	31	261*
14	21	32	261*
15	23	33	261*
16	42	34	261*
17	47	35	261*
18	52		

Berdasarkan data pada tabel 4.2 akan ditentukan penduga parameter α, βdan θ dari distribusi gamma diperumum berdasarkan penyensoran tipe I. Pendugaan parameter ini dilakukan dengan metode iterasi Newton-Rapshon yang diselesaikan dengan bantuan *software* R. hasil perhitungan ditampilkan pada lampiran (5), nilai estimasi untuk α dan β diperoleh setelah melakukan 18 kali iterasi, di mana nilai $\hat{\alpha} = 0.49999$ dan $\hat{\beta} = 1.25575$. Kemudian untuk mengetahui nilai $\hat{\theta}$, maka nilai $\hat{\alpha} = 0{,}49999$ dan $\hat{\beta} = 1.25575$ disubstitusi pada persamaan (4.7), sehingga diperoleh $\hat{\theta} = 26.05336$.

Selanjutnya estimasi interval untuk parameter α, β dan θ dapat diturunkan secara asimtotik dengan menggunakan sifat asimtotik dari penduga maksimum likelihood.

Berdasarkan Persamaan (4.11) akan ditentukan estimasi interval untuk α, β dan θ dari data waktu kegagalan sistem pendingin udara pesawat terbang. Diperoleh matriks informasi dan inversnya sebagai berikut.

$$I_0 = \begin{pmatrix} 143.114144 & -6.198481 & 1.3977756 \\ -6.198481 & 337.085461 & -11.0234021 \\ 1.397776 & -11.0234021 & 0.3933433 \end{pmatrix}$$

$$I_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0.01005 & -0.01177 & -0.36546 \\ -0.01177 & 0.04929 & 1.42334 \\ -0.36546 & 1.42334 & 43.73006 \end{pmatrix}$$

diperoleh $\left(I_0^{-1}\right)_{11} = 0.01005$, $\left(I_0^{-1}\right)_{22} = 0.04929$ dan $\left(I_0^{-1}\right)_{33} = 43.73006$. Misalkan diambil $\gamma = 5\%$ dimana $\hat{\alpha} = 0.49999$, $\hat{\beta} = 1.25575$ dan $\hat{\theta} = 26.05336$ maka

$$\Leftrightarrow P\left\{\hat{\alpha} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{11}} \le \alpha \le \hat{\alpha} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{11}}\right\} = 1 - \gamma$$

$$\Leftrightarrow P\{0.49999 - z_{0.975}\sqrt{0.01005} \le \alpha \le 0.49999 - z_{0.025}\sqrt{0.01005}\} = 95\%$$

$$\Leftrightarrow P\{0.30351 \le \alpha \le 0.69648\} = 95\%$$

Jadi, interval kepercayaan dua sisi $(1-\gamma)100\%$ untuk α pada sampel tersensor tipe I adalah $(0.30351, 0.69648)$. Kemudian interval kepercayaan untuk β

$$\Leftrightarrow P\left\{\hat{\beta} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(I_0^{-1}\right)_{22}} \le \beta \le \hat{\beta} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(I_0^{-1}\right)_{22}}\right\} = 1 - \gamma$$

$$\Leftrightarrow P\{1.25575 - z_{0.975}\sqrt{0.04929} \le \beta \le 1.25575 - z_{0.025}\sqrt{0.04929}\} = 95\%$$

$$\Leftrightarrow P\{0.82061 \le \beta \le 1.69089\} = 95\%$$

Jadi, interval kepercayaan dua sisi $(1-\gamma)100\%$ untuk β pada sampel besar tersensor tipe I adalah $(0.82061, 1.69089)$. Selanjutnya interval kepercayaan untuk θ

$$\Leftrightarrow P\left\{\hat{\theta} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(I_0^{-1}\right)_{33}} \le \theta \le \hat{\theta} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(I_0^{-1}\right)_{33}}\right\} = 1 - \gamma$$

$$\Leftrightarrow P\{26.05336 - z_{0.975}\sqrt{43.73006} \le \theta \le 26.05336 - z_{0.025}\sqrt{43.73006}\} = 95\%$$

$$\Leftrightarrow P\{13.0924 \le \theta \le 39.01432\} = 95\%$$

Jadi, interval kepercayaan dua sisi $(1-\gamma)100\%$ untuk θ pada sampel besar tersensor tipe I adalah $(13{,}0924, 39{,}01432)$.Dari hasil estimasi nilai parameter dapat diperoleh fungsi survival dan fungsi hazard distribusi gamma diperumum.

Misalkan diberikan sembarang t dalam satuan waktu minggu, maka fungsi survival (tahan hidup) dari sistem pendingin udara pesawat terbang dapat diestimasi dengan fungsi $\hat{s}(t)$ sebagai berikut.

$$\hat{S}(t) = \frac{1}{\Gamma(\hat{\alpha})}\int_{\left(\frac{t}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\beta}}}^{\infty} u^{\hat{\alpha}-1}e^{-u}\,du$$

$$\hat{S}(0) = \frac{1}{\Gamma(0.49999)}\int_{\left(\frac{0}{26.05336}\right)^{1.25575}}^{\infty} u^{0.49999-1}e^{-u}\,du = 1$$

$$\hat{S}(10) = \frac{1}{\Gamma(0.49999)}\int_{\left(\frac{10}{26.05336}\right)^{1.25575}}^{\infty} u^{0.49999-1}e^{-u}\,du = 0.4382$$

$$\hat{S}(15) = \frac{1}{\Gamma(0.49999)} \int_{\left(\frac{15}{26.05336}\right)^{1.25575}}^{\infty} u^{0.49999-1} e^{-u}\, du = 0.3173$$

Angka tersebut menyatakan bahwa probabilitas sistem pendingin udara pesawat terbang untuk mampu bertahan selama 10 minggu adalah sebesar $43{,}82\%$. Sedangkan probabilitas sistem pendingin udara pesawat terbang untuk mampu bertahan selama 15 minggu adalah sebesar $31{,}73\%$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin tinggi nilai t maka peluang daya tahan suatu sistem pendingin udara pesawat terbang akan semakin kecil.

Angka tersebut menyatakan bahwa probabilitas sistem pendingin udara pesawat terbang mengalami kegagalan selama 10 minggu adalah sebesar $50{,}16\%$. Sedangkan probabilitas sistem pendingin udara pesawat terbang mengalami kegagalan selama 15 minggu adalah sebesar $78{,}26\%$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin lama daya tahan suatu sistem pendingin udara pesawat terbang, maka akan semakin tinggi probabilitas kegagalannya.

4. Penutup

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang diuraikan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Estimasi parameter merupakan suatu metode yang digunakan untuk memprediksi karakteristik suatu populasi bersadarkan sampel. Metode estimasi parameter yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode maksimum likelihood. Penduga maksimum likelihood untuk parameter distribusi gamma diperumum berdasarkan sampel tersensor tipe II tidak dapat diperoleh dalam bentuk eksak dikarenakan turunan pertama dari fungsi $\ln L(\alpha, \beta, \theta)$ bersifat nonlinear. Karena persamaan tersebut merupakan persamaan nonlinear untuk α, β dan θ, maka untuk menyelesaikannya digunakan metode iterasi Newton-Rapshon multivariabel. Untuk sampel tersensor tipe I, juga tidak dapat diperoleh rumus yang konkrit di manapenduga untuk α dan β merupakan persamaan nonlinear. Untuk menyelesaikan persamaan nonlinear tersebut digunakan metode iterasi Newton-Rapshon multivariabel.
2. Pada penerapan data tersensor tipe II yaitu pada data waktu bertahan hidup marmut yang terinfeksi *virulent tubercle Bacilli*, diperoleh $\hat{\alpha} = 1{,}54827$,$\hat{\beta} = 1{,}44184$ dan $\hat{\theta} = 139{,}52374$. Pada penerapan data tersensor tipe I yaitu pada data waktu kegagalan sistem pendingin udara pesawat terbang, diperoleh $\hat{\alpha} = 0{,}49999$, $\hat{\beta} = 1{,}25575$ dan $\hat{\theta} = 26{,}05336$. Interval kepercayaan untuk α, β dan θ berdasarkan sampel tersensor tipe II yaitu untuk α adalah $(1.01669, 2.07985)$, untuk β adalah $(1.06028, 1.8234)$ dan untuk θ adalah $(88.29574, 190.75174)$.Interval kepercayaan untuk α, β dan θ berdasarkan sampel tersensor tipe I yaituuntuk α adalah $(0.30351, 0.69648\,)$, untuk β adalah $(0.82061, 1.69089\,)$ dan untuk θ adalah $(13{,}0924\,, 39{,}01432)$. Parameter duga tersebut dapat digunakan untuk mengetahui fungsi survival dan fungsi hazard, yaitu semakin lama waktu hidup suatu individu/item maka semakin rendah probabilitas bertahan hidupnya dan semakin tinggi probabilitas kegagalannya.

4.2 Saran

1. Dalam pelaksanaan penelitian lebih lanjut mengenai estimasi distribusi gamma diperumum untuk sampel tersensor, dapat menggunakan metode lain atau membandingkan metode yang telah diteliti dengan metode lainnya untuk mendapatkan hasil yang lebih baik.
2. Peneliti selanjutnya disarankan untuk menggunakan tipe penyensoran selain penyensoran tipe II dan tipe I pada distribusi gamma diperumum.

Ucapan Terimakasih. Penulis menyampaikan terimaksi yang setulus-tulusnya kepada dosen pembimbing atas segala curahan perhatiannya sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik. Penulis juga menyampaikan terimaksis kepada seluruh pihak yang turut andil dalam penelitian ini baik langsung maupun tidak langsung.

Daftar Pustaka

Bain, L.j., and M. Eingelhardt. 1992. Intoduction to Probability and Mathematical Statistics Second Edition. Duxbury Press:California

Fatehkurohman, M. 2021. Nonparametrics Maximum Likelihood Estimation pada Data Tersensor Multivariat. Depublish:Yogyakarta

Khodabin, M. dan Ahmadabadi, A. 2010. Some Proporties of Generalized Gamma Distribution, Mathematical Sciences, Vol 4(1):9-28

Lawless, J.F. 1982. Statistical Models and Methods For Lifetime Data. USA: Jhon wiley and Sons, Inc.

Murti, V.D., Sudarno dan Suparti, 2012. Kajian Ketahanan Hidup Tersensor Tipe I

Berdistribusi Eksponensial dan Six Sigma. Jurnal Gaussian, Vol 1(1):241-248

Rofi, M. 2014. Iterasi Newton untuk Mengestimasi Parameter Distribusi Generalized Gamma, STIMIKA, Vol 1(1):13-24.

Seber, G.A.F. dan Wild, C.J. 2003. Nonlinear Regression. John Wiley & Sons, The United States of America.

Shanker, R. dan Shukla, K.K. 2016. On Modeling Of Lifetime Data Using Three-Parameter Generalized Lindley and Generalized Gamma Distributions, Vol 4(7):00117.

Solih, A., Cahyandari. dan Tarkinih. 2017. Estimasi Interval Kepercayaan (*Confidence Interval*) Parameter Model Proses Geometrik Weibull Pada Aanalisi Uji Hidup Untuk Data Tersensor Tipe II. Vol 10(1), ISSN 1979-8911.

Stacy, E.W. 1962. A Generalization Of The Gamma Distribution, The Annals of Mathematical Statistics, Vol 33, 1187-1192.

Widiharih, T. dan Mardjiyati, W. 2008. Inferensi Data Uji Hidup Tersensor Tipe II Berdistribusi Rayleigh, Media Statistika, Vol 1(2):69-74.

Walpole, R.E. dan Myers R.H. 1995. Imu Peluang dan Statistika untuk Insiyur dan Ilmuan terjemahan RK Sembiring. Bandung: ITB.

Diterima pada tanggal 21 Mei 2022.
Terbit online pada tanggal 28 Juli 2022