SIFAT-SIFAT MATRIKS KETETANGGAAN PADA GRAF RODA

Nasrul[1)]
[1)]Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahunan Alam, Universitas Haluoleo
Email: nasrulsuru@gmail.com

Arman[1,a)], **Jufra**[1,b)], **Wayan Somayasa**[1,c)] dan **Herdi Budiman**[1,d)]
[1)]Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahunan Alam, Universitas Haluoleo
Email: [a)]arman.mmtk@uho.ac.id, [b)]jufralect@gmail.com, [c)]wayan.somayasa@uho.ac.id,
[d)]herdi.budiman@uho.ac.id

ABSTRAK

Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf lingkaran W_n. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui cara menentukan sifat-sifat matriks ketetanggaan pada graf roda, juga untuk mengetahui sifat-sifat matriks ketetanggaan pada graf roda. Selanjutnya untuk menentukan sifat-sifat matriks ketetanggaan pada graf roda dimulai dari mendeskripsikan matriks ketetanggaan dari graf roda W_n, mencari dan mengamati nilai determinan, invers, nilai eigen dan vektor eigen. Determinan matriks ketetanggaan pada graf roda W_n yaitu: untuk graf roda W_n dimana $n = 2k + 1$ dan $k \in \mathbb{N}$ maka $\det W_n = -n$; $n = 2(2k + 1)$dan $k \in \mathbb{N}$ maka$\det W_n = 2n$; $n = 4k$ dan $k \in \mathbb{N}$ maka $\det W_n = 0$. Nilai invers matriks ketetanggaan pada graf roda W_n yaitu untuk graf roda W_n dimana $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ tidak memiliki invers, untuk graf roda W_n dimana $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ dan $n = 2(2k + 1)$ dan $k \in \mathbb{N}$ memiliki invers. Entri-entri diagonal utama matriks yang didiagonalisasi sama dengan nilai eigennya dan jumlah entri diagonal utamanya atau *trace* adalah nol.

Kata Kunci: Graf Roda, Matriks Ketetanggaan, Nilai Eigen

ABSTRACT

A wheel graph is a graph obtained by adding one point to a circle graph W_n. The purpose of this research is to find out how to determine the properties of the adjacency matrix on a wheel graph, as well as to find out the properties of the adjacency matrix on a wheel graph. Furthermore, to determine the properties of the adjacency matrix on a wheel graph, it starts with describing the adjacency matrix of the W_n wheel graph, looking for and observing the determinant value, inverse, eigenvalues and eigenvector. The determinants of the adjacency matrix on the W_n wheel graph are; for wheel graph W_n where $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ then $\det W_n = -n$; $n = 2(2k + 1), k \in \mathbb{N}$ then $\det W_n = 2n$; $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ then $\det W_n = 0$. The inverse value of the adjacency matrix on the wheel graph W_n is for the wheel graph W_n where $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ has no inverse, for the wheel graph W_n where $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ and $n = 2(2k + 1)$ and $k \in \mathbb{N}$ has an inverse. The main diagonal entries of a diagonalized matrix are equal to their eigenvalues and the number of main diagonal entries or traces is zero.

Keywords: Wheel Graph, Adjacency Matrix, Eigenvalues

1. Pendahuluan

Teori graf sampai saat ini menjadi pokok bahasan yang memiliki banyak terapan. Graf biasa digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungannya. Gambaran umum dari graf dapat dinyatakan dalam bentuk objek sebagai titik, noktah atau bulatan, sedangkan garis dinyatakan sebagai hubungan antar objek. Daya tarik dari teori graf dapat dilihat berdasarkan penerapannya yang sangat luas, mulai dari teknik kelistrikan, ilmu komputer, fisika, kimia, biologi, linguistik, ekonomi, sosiologi, manajemen, pemasaran, sampai permainan asah otak dan pemecahan teka-teki. Salah satu topik yang menarik untuk menjadi pokok bahasan pada teori graf adalah graf roda.

Graf roda adalah struktur khusus dari suatu graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul v pada graf siklus sehingga setiap simpul pembentuk siklus tersebut bertetangga dengan v. Ciri khusus dari graf roda yaitu setiap titik pada sikelnya selalu berderajat 3 dan banyaknya titik sikelnya menggambarkan derajat titik pusatnya[3]. Matriks ketetanggaan G adalah matriks dua dimensi yang berukuran $n \times n$. Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$ maka $a_{ij} = 1$ jika simpul i dan j bertetangga, sebaliknya $a_{ij} = 0$ jika simpul i dan j tidak bertetangga. Matriks ketetanggaan untuk graf sederhana dan tidak berarah selalu simetri, sedangkan untuk graf berarah matriks ketetanggaannya belum tentu simetri (akan simetri jika berupa graf berarah lengkap). Selain itu diagonal utamanya selalu nol karena tidak ada sisi gelang.[1]

Keuntungan representasi dengan matriks ketetanggaan adalah elemen matriksnya dapat diakses langsung melalui indeks. Selain itu, kita juga dapat menentukan dengan langsung apakah simpul i dan simpul j bertetangga. Menentukan sifat-sifat matriks ketetanggaan adalah cara untuk mengetahui karakteristik dari graf tersebut.

2. Metode

Penelitian ini adalah penelitian dasar/teoritis. metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau studi literatur dengan menganalisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan sifat-sifat matriks ketetanggaan pada graf roda.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Memasukan graf roda $W_3, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8, W_9,$ dan W_{10} serta mendeskripsikan bentuk matriks ketetanggaannya.
2. Menentukan determinan dari bentuk matriks ketetanggaan pada graf roda
3. Menentukan nilai eigen dari matriks ketetanggaan pada graf roda.
4. Menentukan diagonalisasi dari matriks ketetanggaan pada graf roda
5. Menarik kesimpulan.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Matriks Ketetanggaan pada Graf Roda

Menurut [1] Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul $n \geq 1$. G merupakan matriks dwimatra yang berukuran $n \times n$. Jika matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$ untuk simpul i dan j bertetangga dan $a_{ij} = 0$ untuk simpul i dan j tidak bertetangga. Matriks ketetanggaan dinamakan juga matriks nol-satu karena pada matriks tersebut hanya berisi angka nol dan satu.

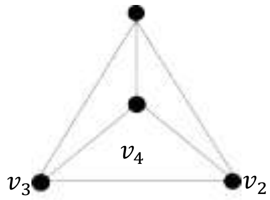
Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf lingkaran W_n, dan menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik pada graf lingkaran tersebut.[5]

Perhatikan graf roda Berikut!

1) Graf Roda W_3

v_1

Gambar 1 Graf Roda W_3 dengan Label Terurut



Berdasarkan Gambar 1 dapat diperoleh:[1]

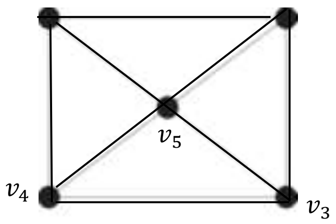
a. Simpul v_1 bertetangga dengan simpul v_2, v_3 dan v_4 maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom v_1 pada baris v_2, v_3 dan v_4 serta bernilai 0 untuk baris v_1.
b. Simpul v_2 bertetangga dengan simpul v_1, v_3 dan v_4 maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom v_2 pada baris v_1, v_3 dan v_4 serta bernilai 0 untuk baris v_2.
c. Simpul v_3 bertetangga dengan simpul v_1, v_2 dan v_4 maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom v_3 pada baris v_1, v_2 dan v_4 serta bernilai 0 untuk baris v_3.
d. Simpul v_4 bertetangga dengan simpul v_1, v_2 dan v_3 maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom v_4 pada baris v_1, v_2 dan v_3 serta bernilai 0 untuk baris v_4.

Berikut matriks ketetanggaan yang diperoleh dari graf W_3

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3. 1}$$

2) Graf Roda W_4

v_1 v_2



Gambar 2 Graf Roda W_4 dengan Label Terurut

Berdasarkan Gambar 2 dapat diperoleh: [1]

a. Simpul v_1 bertetangga dengan simpul v_2, v_4 dan v_5 maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom v_1 pada baris v_2, v_4 dan v_5 serta bernilai 0 untuk baris -baris lainnya.
b. Simpul v_2 bertetangga dengan simpul v_1 , v_3 dan v_5 maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom v_2 pada baris v_1, v_3 dan v_5 serta bernilai 0 untuk baris-baris lainnya.
c. Simpul v_3 bertetangga dengan simpul v_2, v_4 dan v_5 maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom v_3 pada baris v_2 , v_4 dan v_5 serta bernilai 0 untuk baris -baris lainnya.
d. Simpul v_4 bertetangga dengan simpul v_3 , v_1 dan v_5 maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom v_4 pada baris v_3 , v_1 dan v_5 serta bernilai 0 untuk -baris lainnya.
e. Simpul v_5 bertetangga dengan simpul v_1, v_2 , v_3 dan v_4 maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom v_6 pada baris v_1, v_2 , v_3 dan v_4 serta bernilai 0 untuk baris-baris lainnya.

Berikut matriks ketetanggaan yang diperoleh dari graf W_4berikut:

$$\boldsymbol{B} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3.2)$$

Berikut matriks ketetanggaan yang diperoleh pada graf W_5 yaitu matriks **C**, W_6 yaitu matriks **D** , W_7 yaitu matriks E, W_8 yaitu matriks $\boldsymbol{F}$, W_9 yaitu matriks $\boldsymbol{G}$ dan W_{10} $\boldsymbol{H}$ yang metode yang sama pada graf roda W_3dan W_4 sebagai berikut**:**

$$\boldsymbol{C} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3.3)$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3.4)$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3.5)$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3.6)$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3.$$

7)

$$\boldsymbol{H} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3.$$

8)

3.2. Menghitung Determinan Matriks

Dalam menghitung nilai determinan dari matriks ketetanggaan, terlebih dahulu ditentukan bentuk matriks ketetanggaannya. Untuk mencari determinan matriks dapat menggunakan operasi baris elementer. Operasi baris elementer meliputi tiga jenis operasi berikut:[2]

1. Mengalikan sebuah baris dengan sebuah konstanta yang tak sama dengan nol,
2. Pertukarkan kedua baris dalam matriks,
3. Menambahkan suatu baris dengan kelipatan dari suatu baris yang lainnya.

Pada subjudul 3.1 diperoleh delapan matriks ketetanggaan dari delapan graf roda

$W_3, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8, W_9$ dan W_{10}. Dari matriks-matriks tersebut akan dicari nilai determinannya. Selanjutnya akan dihitung determinan dari matriks ketetanggaan graf W_3 yaitu matriks pada Persamaan (3. 1) dengan mengguakan operasi baris elementer berikut:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Perhatikan Langkah-Langkah 3.2. 1 berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} -R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 - R_1 \to R_3 \\ R_4 - R_1 \to R_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 + R_2 \to R_3 \\ R_4 + R_2 \to R_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_4 - \frac{1}{2}R_3 \to R_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Maka

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1)(-2)\left(-\frac{3}{2}\right) = -3 \qquad (3.\ 9)$$

Dengan menggunakan langkah yang sama seperti Langkah-Langkah 3.2.1 maka diperoleh matriks $\boldsymbol{B}$ sampai Matriks $\boldsymbol{H}$ berikut:

$$\det \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.\ 10)$$

$$\det(\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \qquad (3.\ 11)$$

$$\det(\boldsymbol{D}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12 \qquad (3.12)$$

$$\det \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \quad (3.13)$$

$$\det \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

$$\det \boldsymbol{G} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \quad (3.15)$$

$$\det \boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 20 \quad (3.16)$$

Sehingga dapat ditarik kesimpulan determinan matriks ketetanggaan pada graf roda W_n yaitu:

1. Untuk graf roda W_n dimana $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ maka barisan determinan yang terbentuk yaitu $-3, -5, -7, \ldots, -n$.
   Bukti:
   Untuk membuktikan pernyataan di atas digunakan langkah induksi sebagai berikut:
   a. Buktikan bahwa $k = 1$ benar.
      $n = 2k + 1 = 2(1) + 1 = 3$
      Maka $\det W_n = -(2(1) + 1) = -3$ benar.
   b. Asumsikan $k = p$ benar, sehingga
      $n = 2k + 1 = 2p + 1$
      Maka $\det W_n = -(2p + 1)$.
   c. Akan dibuktikan bahwa $k = p + 1$ juga benar.
      $n = 2k + 1 = 2(p + 1) + 1 = 2p + 3$
      Maka
      $\det W_n = -2p - 3)$
      $= -(2p + 3)$
      $= -(2(p + 1) + 1$ benar.
2. Untuk graf roda W_n dimana $n = 2(2k + 1)$,dan $k \in \mathbb{N}$ maka barisan determinan yang terbentuk yaitu $12, 20, 28, \ldots, 2n$.
   Untuk membuktikan pernyataan di atas digunakan langkah induksi sebagai berikut:

a. Buktikan bahwa $k = 1$ benar.
$n = 2(2k+1) = 2(2(1)+1) = 6$
Maka $\det W_n = 2(6) = 12$ benar.

b. Asumsikan $k = p$ benar, sehingga
$n = 2(2k+1) = 2(2p+1) = 4p+2$
Maka $\det W_n = 2(4p+2)$.

c. Akan dibuktikan bahwa $k = p+1$ juga benar.
$n = 2(2k+1) = 4(p+1)+2 = 4p+6$
Maka $\det W_n = 2(4p+6)$
$= 2(4(p+1)+2)$benar.

3. Untuk graf roda W_n dimana $n = 4k,\ k \in \mathbb{N}$ maka nilai determinannya adalah nol.
Untuk membuktikan pernyataan di atas digunakan langkah induksi sebagai berikut:

a. Buktikan bahwa $k = 1$ benar.
$n = 4k = 4(1) = 4$
Maka $\det W_4 = 0$ benar.

b. Asumsikan $k = p$ benar, sehingga
$n = 4k = 4p$
Maka $\det W_{4p} = 0$.

c. Akan dibuktikan bahwa $k = p+1$ juga benar.
$n = 4k = 4(p+1) = 4p+4$
Maka $\det W_n = detW_{4p} + \det W_4$
$= 0$ benar.

3.3. Menentukan Invers Matriks

Matriks ketetanggaan pada graf roda dimulai dari matriks ordo 4×4 sehingga metode invers yang digunakan dalam perhitungan invers matriks ketetanggaan pada graf roda adalah dengan Eliminasi Gauss-Jordan dan operasi baris elementer, untuk menentukan invers matriks dapat menggunakan sejumlah operasi baris elementer pada matriks ketetanggaannya dan melakukan urutan yang sama pada matriks $\boldsymbol{I}$ (matriks identitas), dimana $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I})$ dilakukan OBE $(\boldsymbol{I}|\boldsymbol{A}^{-1})$[2].

Teorema 1 [2] Sebuah matriks $\boldsymbol{A}$ kuadrat dapat dibalik atau memiliki invers jika dan hanya jika $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Bukti:

Jika $\boldsymbol{A}$ dapat dibalik, maka $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$ sehingga $1 = \det \boldsymbol{I} = \det \boldsymbol{A}\ \det \boldsymbol{A}^{-1} = \det\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})$. Sehingga $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Berdasarkan Persamaan (3. 1), matriks identitas yang bersesuaian dengan matriks $\boldsymbol{A}$ yaitu

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dilakukan pengoperasian pada baris elementer dengan matriks ketetanggaan dan matriks identitasnya, maka invers matriks ketetanggaan dari graf roda ditunjukan pada Langkah-Langkah 3.3.1 berikut:

$$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftrightarrow R_1 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4 - R_1 \rightarrow R_4 \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} R_3 - R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4 - R_2 \rightarrow R_4 \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_4 + R_3 \rightarrow R_3 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$-\frac{2}{3}R_4 \rightarrow R_4 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} R_1 - R_4 \rightarrow R_1 \\ R_2 - R_4 \rightarrow R_2 \\ R_3 - \frac{1}{2}R_4 \rightarrow R_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} R_1 - R_3 \rightarrow R_1 \\ R_2 - R_3 \rightarrow R_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Sehingga diperoleh invers dari matriks $\boldsymbol{A}$ yaitu,

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari invers dari matriks $\boldsymbol{B}$. Berdasarkan Persamaan (3. 10), determinan dari matriks $\boldsymbol{B} = 0$ pada maka berdasarkan teorema 1 matriks $\boldsymbol{B}$ tidak memiliki invers.

Berikut invers dari matriks $\boldsymbol{C}$ sampai dengan matriks $\boldsymbol{H}$ yang diperoleh dengan mengggunakan langkah-langkah yang sama seperti pada Langkah-Langkah 3.3.1:

$$\boldsymbol{C^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D^{-1}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{7}{12} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{7}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E^{-1}} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H^{-1}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & \frac{1}{10} \\ -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & \frac{1}{10} \\ -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan beberapa invers matriks diatas dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Untuk graf roda W_n dimana $n = 4k,\ k \in \mathbb{N}$ maka matriks ketetanggaannya tidak memiliki invers.
2. Untuk graf roda W_n dimana $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ dan $n = 2(2k + 1)$ dan $k \in \mathbb{N}$ maka matriks ketetanggaannya memiliki invers.

3.4. Menghitung Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Matriks Ketetanggaan

Perhatikan bahwa matriks ketetanggaan pada graf roda berupa matriks simetris, sehingga nilai nilai eigennya akan berupa bilangan real dan basis vektor eigen yang saling ortogonal. [1]

Definisi 1 [4] Misalkan $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ suatu matriks persegi berukuran $n \times n$, maka trace dari matriks $\boldsymbol{A}$ didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal matriks $\boldsymbol{A}$ dan dinotasikan dengan $tr(A)$.

Dinyatakan bahwa trace matriks $\boldsymbol{A}$ adalah:

$$tr(A) = \sum_{i}^{n} \lambda_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

Akibat 1

Jumlah nilai eigen dari matriks ketetanggaan suatu graf roda adalah 0.

Bukti:

Graf roda adalah graf sederhana yang tidak memiliki loop di setiap simpulnya sehingga diperoleh $v_{ii} = 0$ untuk $i = 1,2,\dots,n$. Dari Definisi 1 diperoleh bahwa $tr(A) = \sum_i^n \lambda_{ii}$. Karena diagonal utama dari matriks ketetanggaan suatu graf roda adalah 0, maka jumlah nilai eigennya adalah juga 0.

Definisi 2 [2] Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x didalam R^n dinamakan vektor eigen (*eigenvektor)* dari **A** jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$$

Untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen *(eigenvalue)* dari $\boldsymbol{A}$ dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai eigen, maka kita akan beralih ke masalah untuk mencari vektor eigen. Vektor eigen $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor taknol $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ Secara ekivalen, vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor taknol dalam ruang pemecahan dari $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ Kita menamakan ruang pemecahan ini sebagai ruang eigen (*eigenspace*) dari $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan λ[2].

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari beberapa matriks ketetanggaan yang sudah didefinisikan diatas sebagai berikut:

1. Diketahui matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan akan dicari nilai eigen dan vektor eigen seperti Langkah-Langkah 3.4. 1 berikut:

$$\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3 = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen $\lambda_{A1} = \lambda_{A2} = \lambda_{A3} = -1$ dan $\lambda_{A4} = 3$. Untuk mencari vektor eigen sebagai berikut:

a. Untuk nilai eigen $\lambda_{A1} = \lambda_{A2} = \lambda_{A3} = -1$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{A1} = \lambda_{A2} = \lambda_{A3} = -1$ adalah solusi taktrivial dari $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ yaitu,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena setiap barisnya memiliki entri yang sama maka dapat dituliskan dalam suatu Persamaan 3. 17 berikut.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad (3.\ 11)$$

Sehingga $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$.

Maka dipeloleh vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda_{A1} = \lambda_{A2} = \lambda_{A3} = -1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Misalkan $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ dan $x_4 = 1$ maka diperoleh vektor eigen

$$\boldsymbol{v_{A1}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_{A2}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_{A3}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b. Untuk nilai eigen $\lambda_{A4} = 3$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{A4} = 3$ adalah solusi taktrivial dari $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ yaitu,

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk memecahkan persamaan tersebut diatas dapat menggunakan operasi baris elementer sebagai berikut.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 + \frac{1}{3}R_1 \to R_2 \\ R_3 + \frac{1}{3}R_1 \to R_3 \\ R_4 + \frac{1}{3}R_1 \to R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_3 + \frac{1}{2}R_2 \to R_3 \\ R_4 + \frac{1}{2}R_2 \to R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_4 + R_3 \to R_4 \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

maka diperoleh Persamaan 3. 18 sebagai berikut:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -\frac{8}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0 \\ \qquad -2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad (3.\ 12)$$

Sehingga dari Persamaan (3. 12 dapat ditulis:

$$-2x_3 = -2x_4 \to x_3 = x_4$$

$$-\frac{8}{3}x_2 = -\frac{4}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4 = -\frac{4}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_4 = -\frac{8}{3}x_4 \to x_2 = x_4$$

$$-3x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = -x_4 - x_4 - x_4 = -3x_4 \to x_1 = x_4$$

maka dipeloleh vektor-vektor eigen $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan $\lambda_{A4} = 3$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Misalkan $x_4 = 1$ maka diperoleh vektor eigen

$$\boldsymbol{v_{A4}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.5. Diagonalisasi Matriks

Definisi 3 [2] Matriks kuadarat $\boldsymbol{A}$ dinamakan dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks $\boldsymbol{P}$ yang dapat dibalik sehingga $\boldsymbol{P^{-1}AP}$ diagonal matriks $\boldsymbol{P}$ dikatakan mendiagonalisasi $\boldsymbol{A}$.

Berdasarkan Definisi 3.5.1, maka matriks ketetanggaan pada graf roda dapat didiagonalisasi karena merupakan matriks bujur sangkar atau matriks berukuran $n \times n$.

Matriks $\boldsymbol{P}$ yang diperoleh berdasarkan Persamaan (3. 1) yaitu,

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P^{-1}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 2.4.3 maka untuk mencari matriks diagonal dari matriks $\boldsymbol{A}$ yaitu dengan menggunakan rumus $\boldsymbol{P^{-1}AP}$

Maka diperoleh matriks diagonal $\boldsymbol{K}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita akan mencari matriks diagonal dari matriks ketetanggaan pada graf roda W_4 yaitu matriks $\boldsymbol{B}$ pada Persamaan (3. 2). Matriks $\boldsymbol{P}$ yang diperoleh berdasarkan Persamaan (3. 2) yaitu

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -0{,}309 & 0{,}809 \\ 0 & -1 & 1 & -0{,}309 & 0{,}809 \\ 1 & 0 & -1 & -0{,}309 & 0{,}809 \\ 0 & 1 & 1 & -0{,}309 & 0{,}809 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P^{-1}} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 & 0 \\ -0{,}224 & -0{,}224 & -0{,}224 & -0{,}224 & 0{,}724 \\ 0{,}224 & 0{,}224 & 0{,}224 & 0{,}224 & 0{,}276 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 3.5.1 maka untuk mencari matriks diagonal dari matriks $\boldsymbol{B}$ yaitu dengan menggunakan rumus $\boldsymbol{P^{-1}BP}$.

Maka diperoleh matriks diagonal $\boldsymbol{L}$ sebagai berikut.

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}236 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}236 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita akan mencari matriks diagonal dari matriks ketetanggaan pada graf roda W_5 yaitu matriks $\boldsymbol{C}$ pada Persamaan (3. 3). Matriks $\boldsymbol{P}$ yang diperoleh berdasarkan Persamaan (3. 3) yaitu

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{6}-1 & \sqrt{6}-1 \\ -1 & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka invers dari matriks $\boldsymbol{P}$ adalah sebagai berikut.

$$\boldsymbol{P^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{10} & \frac{-\sqrt{5}-1}{10} & 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{-\sqrt{5}-1}{10} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{10} & \frac{\sqrt{5}-1}{10} & 0 & \frac{-\sqrt{5}-1}{10} & \frac{-\sqrt{5}-1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{10} & \frac{-\sqrt{5}-1}{10} & 0 & \frac{-\sqrt{5}-1}{10} & -\sqrt{6}-1 & \frac{\sqrt{5}-1}{10} \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{10} & \frac{-\sqrt{5}-1}{10} & 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{10} & \frac{\sqrt{5}-1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{-\sqrt{6}+6}{60} & \frac{-\sqrt{6}+6}{60} & \frac{-\sqrt{6}}{12} & \frac{-\sqrt{6}+6}{60} & \frac{-\sqrt{6}+6}{60} & \frac{-\sqrt{6}+6}{60} \\ \frac{\sqrt{6}+6}{60} & \frac{\sqrt{6}+6}{60} & \frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}+6}{60} & \frac{\sqrt{6}+6}{60} & \frac{\sqrt{6}+6}{60} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 3.5.1 maka untuk mencari matriks diagonal dari matriks $\boldsymbol{C}$ yaitu dengan menggunakan rumus $\boldsymbol{P^{-1}CP}$.

Maka diperoleh matriks diagonal $\boldsymbol{M}$ sebagai berikut.

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{6}+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6}+1\end{bmatrix}$$

Selanjuntya kita akan mencari matriks diagonal dari matriks ketetanggaan pada graf roda W_6 yaitu matriks $\boldsymbol{D}$ pada Persamaan

(3. 4). Matriks $\boldsymbol{P}$ yang diperoleh berdasarkan Persamaan

(3. 4) yaitu

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{7}-1 & \sqrt{7}-1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Maka invers dari matriks $\boldsymbol{P}$ adalah sebagai berikut.

$$\boldsymbol{P^{-1}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{\sqrt{7}+7}{84} & -\frac{\sqrt{7}+7}{84} & \frac{-\sqrt{7}}{14} & -\frac{\sqrt{7}+7}{84} & -\frac{\sqrt{7}+7}{84} & -\frac{\sqrt{7}+7}{84} & -\frac{\sqrt{7}+7}{84}\\ \frac{\sqrt{7}+7}{84} & \frac{\sqrt{7}+7}{84} & \frac{\sqrt{7}+7}{84} & \frac{\sqrt{7}+7}{84} & \frac{\sqrt{7}+7}{84} & \frac{\sqrt{7}+7}{84} & \frac{\sqrt{7}+7}{84}\end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 2.4.3 maka untuk mencari matriks diagonal dari matriks **D** yaitu dengan menggunakan rumus $\boldsymbol{P^{-1}DP}$.

Maka diperoleh matriks diagonal $\boldsymbol{N}$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{7}+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{7}+1\end{bmatrix}$$

Dari empat matriks diagonal di atas dapat disimpulkan bahwa entri-entri pada diagonal utama matriks yang didiagonalisasi sama dengan nilai eigennya dan jumlah entri diagonal utamanya atau *trace* sama dengan nol.

4. Kesimpulan dan Saran

1) Menentukan sifat-sifat matriks ketetanggaan dimulai dari mendeskripsikan matriks ketetanggaan dari graf roda W_n, mencari dan mengamati nilai determinan, mementukan invers, melihat nilai eigen dan vektor eigen dan menentukan matriks diagonal dari matriks ketetanggaan pada graf roda.
2) Dengan melihat matriks ketetanggan Graf $W_3, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8, W_9$ dan W_{10} dapat dibuat beberapa kesimpulan yaitu:
   a. Entri-entri matriks ketetanggaan W_n hanya terdiri entri 0 (tidak ada hubungan) dan entri 1 (ada hubungan).
   b. Entri-entri diagonal utama matriks ketetanggaan pada graf roda W_n adalah 0.
   c. Matriks yang terbentuk adalah matriks bujur sangkar $n \times n$.
   d. Matriks yang terbentuk adalah matriks simetris dimana $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$.

Determinan matriks ketetanggaan pada graf roda W_n yaitu:

$$\text{Det }(W_n)=\begin{cases}-n, & n=2k+1, \quad k\in\mathbb{N}.\\ 0, & n=4k, \quad k\in\mathbb{N}.\\ 2n, & n=2(2k+1), \quad k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Nilai invers matriks ketetanggaan pada graf roda W_n sebagai berikut:

1. Untuk graf roda W_n dimana $n=4k$, $k\in\mathbb{N}$ maka matriks ketetanggaannya tidak memiliki invers.
2. Untuk graf roda W_n dimana $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$ dan $n=2(2k+1)$, $k\in\mathbb{N}$ maka matriks ketetanggaannya memiliki invers.

Dari empat matriks diagonal diatas dapat disimpulkan bahwa entri-entri pada diagonal utama matriks yang didiagonalisasi sama dengan nilai eigennya dan jumlah entri diagonal utamanya atau trace sama dengan nol.

Adapun saran pada penelitian ini yaitu:

1. Penelitian selanjutnya dapat melibatkan analisis matematis yang lebih rinci tentang sifat-sifat matriks ketetanggaan pada graf roda, seperti membuktikan secara formal tentang sifat simetri atau mengidentifikasi korelasi antara sifat-sifat matriks ketetanggaan dengan parameter lain dalam graf roda.
2. Dapat dijadikan reverensi dan bahan bacaan yang lebih baik tentang matriks ketetanggaan pada graf roda dan potensi aplikasinya dalam berbagai bidang penelitian dan aplikasi praktis.

Ucapan Terima Kasih: Saya ucapkan terima kasih kepada kedua orang tua dan pembimbing saya yang telah memberikan saran dan dukungan dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

Daftar Pustaka

[1] H. Alsbaldo dan M. Subhan. (2021). Sifat-Sifat Matriks Ketetanggaan Pada Graf Petersen. In *Journal Of Mathematics UNP* (Vol. 6).

[2] H. Anton. (1995). Aljabar Linear Elementer. Jakarta: Erlanggga.

[3] G. Chartrand and L. Lesniak. (1987). Graphs and Digraphs. Wadsworth Publ. Co. Belmont CA. USA.

[4] J.E. Gentle. (2007). Matrix Algebra. NewYork : Springer.

[5] D. Suryadi dan N. Priatna. (2013). *Representasi Graph dan Beberapa Graph Khusus*. Jur. Pend. Matematika FMIPA UPI 1–44.

Received: September 05, 2023
Revised: Desember 01, 2023
Published: Januari 31, 2024