

MODEL MATEMATIKA PENYAKIT HEPATITIS B DENGAN PENGARUH TRANSMISI VERTIKAL

Desti Asriyah¹⁾

1) Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: destiasriyah089@gmail.com

Norma Muhtar^{1,a)}, Arman^{1,b)}

1) Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: ^{a)} norma.muhtar@uho.ac.id, ^{b)} arman.mtmk@uho.ac.id.

ABSTRAK

Hepatitis B merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh virus (HBV). Virus ini merupakan salah satu tipe dari banyak virus yang menyerang hati. Penelitian ini bertujuan membahas model matematika penyakit hepatitis b dengan pengaruh transmisi vertikal. Dari hasil analisis diperoleh dua titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya dilakukan analisis perilaku selesaiannya dengan menggunakan nilai eigen dan sifat kestabilan di titik kesetimbangan, hasilnya diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit mempunyai dua sifat kestabilan yaitu *saddle point* dan stabil. Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil jika $R_0 < 1$, apabila $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan tidak stabil (*saddle point*) dan sebaliknya titik kesetimbangan endemik positif akan bersifat stabil. Pada analisis numerik dilakukan dengan memvariasikan nilai-nilai parameter dan menggunakan pendekatan Runge-Kutta orde empat.

Kata Kunci : Model SIR, Penyakit Hepatitis B, Nilai R_0 , Titik Kesetimbangan, Sifat Kestabilan

ABSTRACT

Hepatitis B is an infectious disease caused by a virus (HBV). This virus is one type of many viruses that attack the liver. This study aims to discuss the mathematical model of hepatitis B disease with the effect of vertical transmission. From the results of the analysis obtained two disease-free balance points and endemic balance points. Furthermore, an analysis of the behavior of the solution is carried out using the eigenvalues and the properties of stability at the equilibrium point, the result is that the disease-free equilibrium point has two stability properties, namely saddle point and stable. The disease-free equilibrium point will be stable if $R_0 < 1$, if $R_0 > 1$ then the equilibrium point is unstable (*saddle point*) and conversely the positive endemic equilibrium point will be stable. The numerical analysis was carried out by varying the parameter values and using the fourth-order Runge-Kutta approach.

Keywords :SIR Model, Hepatitis B Disease, R_0 value, Equilibrium Point, Stability Properti

1. Pendahuluan

Hepatitis berarti peradangan atau pembengkakan liver atau hati. Hepatitis adalah penyakit berbahaya karena menyerang hati, yang merupakan organ penting dengan ratusan fungsi. Penyakit hepatitis merupakan masalah kesehatan masyarakat di dunia termasuk di Indonesia, yang terdiri dari hepatitis A, B, C, D dan E. Hepatitis A dan E sering muncul sebagai kejadian luar biasa, ditularkan secara *fecal oral* dan biasanya berhubungan dengan perilaku hidup bersih dan sehat, bersifat akut dan dapat sembuh dengan baik. Sedangkan hepatitis B, C dan D (jarang) ditularkan secara *parenteral*, dapat menjadi kronis dan menimbulkan *cirrhosis* dan lalu kanker hati. Virus hepatitis B telah menginfeksi sejumlah 2 miliar orang di dunia, sekitar 240 juta orang diantaranya menjadi pengidap hepatitis B kronik (Kemenkes 2016).

Salah satu jenis hepatitis yang banyak di temui di dunia adalah jenis hepatitis B. Hepatitis B adalah infeksi serius pada hati yang disebabkan oleh virus hepatitis B (HBV). Sepertiga penduduk dunia diperkirakan telah terinfeksi oleh HBV dan sekitar 400 juta orang merupakan pengidap kronik hepatitis B, sedangkan prevalensi di Indonesia dilaporkan berkisar antara 3-17% (Lopa et al. 2018). Virus hepatitis B diperkirakan telah menginfeksi lebih dari 2 milyar orang yang hidup saat ini selama kehidupan mereka. Tujuh puluh lima persen dari semua pembawa kronis hidup di Asia dan Pesisir Pasifik Barat (Kumar 2012).

Pola transmisi hepatitis B bervariasi menurut prevalensi karier. Pada daerah endemis seperti Asia Tenggara, metode transmisi yang paling umum ditemukan adalah transmisi dari ibu ke bayi. Pada daerah endemis ini, transmisi ibu ke bayi mencapai 25-30% dengan risiko infeksi mencapai 60% selama kehidupan (Aslam et al. 2018)

Kejadian transmisi perinatal mencapai 70-90% pada ibu dengan HbsAg positif dan HBeAg positif tanpa adanya imunoprofilaksis. Transmisi ini terjadi melalui proses kelahiran, yaitu ketika terjadi mikrotransfusi atau terdapat kontak antara darah ibu dan mukosa bayi saat kontraksi. Korioamnionitis, ancaman persalinan preterm dan penggunaan alat bantu persalinan juga dapat meningkatkan risiko transmisi hepatitis B. Sementara itu, transmisi transplasenta jarang terjadi dan diperkirakan hanya berkisar 5-15% dari seluruh kehamilan dengan hepatitis B. *Hepatitis B e antigen* (HBeAg) merupakan struktur virus hepatitis B satu-satunya yang dapat menembus sawar darah plasenta karena memiliki berat molekul yang kecil. Oleh karena terdapat reaksi silang terhadap antigen e dan antigen c dalam pengenalan antigen.

maka transfer HBeAg melalui plasenta akan menyebabkan imunotoleransi fetusterhadap *Hepatitis B core Antigen* (HbcAg). Hal inilah yang dapat menyebabkan infeksi hepatitis B kronik setelah kelahiran (Mustika dan Hasanah 2018).

Penelitian tentang model epidemik penyebaran penyakit hepatitis B telah banyak dilakukan diantaranya Model dinamik transmisi penyakit hepatitis B tanpa kekebalan oleh (Rumariyanti dkk, 2017), Kontrol optimal vaksinasi penyebaran virus hepatitis B menggunakan prinsip minimum pontryagin oleh (Hidayati, 2015), Model matematika infeksi virus hepatitis B dengan adsorpsi oleh (Risfana, 2017), Analisis kestabilan pada model transmisi virus hepatitis B yang dipengaruhi oleh migrasi oleh (Zainal dkk., 2015), Dinamika transmisi dan optimal control penyebaran hepatitis akut dan kronis oleh (Khan dkk, 2017).

Penelitian tentang model epidemik penyebaran penyakit hepatitis B telah banyak dilakukan diantaranya Model dinamik transmisi penyakit hepatitis B tanpa kekebalan oleh (Rumariyanti dkk, 2017), Kontrol optimal vaksinasi penyebaran virus hepatitis B menggunakan prinsip minimum pontryagin oleh (Hidayati, 2015), Model matematika infeksi virus hepatitis B dengan adsorpsi oleh (Risfana, 2017), Analisis kestabilan pada model transmisi virus hepatitis B yang dipengaruhi oleh migrasi oleh (Zainal dkk., 2015), Dinamika transmisi dan optimal control penyebaran hepatitis akut dan kronis oleh (Khan dkk, 2017).

Berdasarkan pada beberapa kajian model epidemik yang telah dilakukan tersebut, penulis tertarik untuk mengkaji "Model Matematika Penyakit Hepatitis B Dengan Pengaruh Transmisi Vertikal".

2. Metode

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode penelitian kepustakaan atau studi literatur.

3. Hasil dan Pembahasan

Asumsi

Laju kelahiran diasumsikan sebagai α dimana αx terlahir sehat di kelompok S, sedangkan αy terlahir dikelompok I dimana telah terinfeksi penyakit hepatitis B. Terjadi interaksi antara kelompok S dan kelompok I dengan laju β . Setiap kelompok manusia berkurang karena kematian secara alami dengan laju μ dan untuk kelompok I dapat berkurang karena kematian akibat penyakit hepatitis B dengan laju σ . Terdapat peluang seorang yang terinfeksi hepatitis B untuk mengalami kesembuhan dengan laju ω . Variabel dan parameter yang di gunakan dalam penelitian

ini adalah sebagai berikut:

1. $S(t)$: individu yang sehat atau rentan terinfeksi penyakit pada waktu t
2. $I(t)$: individu yang terinfeksi penyakit hepatitis B pada waktu t
3. $R(t)$: individu yang sembuh pada waktu t
4. α : laju kelahiran
5. β : laju terjadinya interaksi dengan individu *infected*
6. ω : laju kesembuhan
7. αx : bayi yang lahir dalam keadaan sehat
8. αy : bayi yang lahir dalam keadaan terinfeksi penyakit hepatitis B
9. σ : laju kematian akibat telah terinfeksi penyakit
10. μ : laju kematian alami

$$S_2 = \frac{-\alpha y + \mu + \omega + \sigma}{\beta}$$

$$I_2 = \frac{\beta \alpha x + \mu \alpha y + \alpha \beta - \mu^2 - \mu \omega - \mu \sigma}{\beta(-\alpha y + \mu + \omega + \sigma)}$$

$$R_2 = \frac{\omega(\beta \alpha x + \mu \alpha y + \alpha \beta - \mu^2 - \mu \omega - \mu \sigma)}{\beta(-\alpha y + \mu + \omega + \sigma)\mu}$$

Dengan demikian model matematika penyebaran penyakit hepatitis B dengan pengaruh transmisi vertikal tipe SIR dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \beta SI - \mu S + \alpha x$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI + \alpha y I - \mu I - \sigma I - \omega I$$

$$\frac{dR}{dt} = \omega I - \mu R$$

4.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah suatu titik kesetimbangan dimana tidak terjadi penyebaran penyakit pada populasi atau $I = 0$. Titik kesetimbangan bebas penyakit dapat dinyatakan dalam bentuk $E_1^*(S_1, I_1, R_1)$ dengan mensubstitusikan $I = 0$ pada persamaan (4.1) diperoleh:

$$\alpha - \beta S I - \mu S + \alpha x = 0$$

$$\alpha - \beta S 0 - \mu S + \alpha x = 0$$

$$\alpha - \mu S + \alpha x = 0$$

$$S = \frac{\alpha x + \alpha}{\mu}$$

Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit adalah:

$$E_1^*(S_1, I_1, R_1) = E_1^*\left(\frac{\alpha x + \alpha}{\mu}, 0, 0\right)$$

4.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik merupakan titik kesetimbangan saat penyakit menyebar dalam populasi atau saat kelas terinfeksi tidak nol ($I \neq 0$). titik kesetimbangan endemik penyakit dapat dinyatakan dalam bentuk $E_2^*(S_2, I_2, R_2)$. dengan bantuan *software Maple 13* dengan script selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 1, maka titik kesetimbangan endemik yang diperoleh adalah:

4. Simulasi Numerik Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

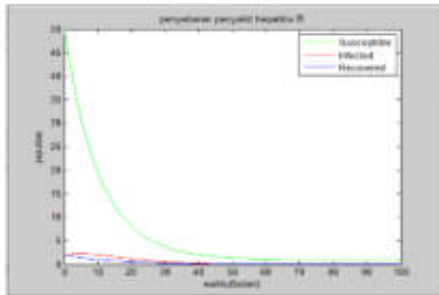
Simulasi pada keadaan bebas penyakit menggunakan syarat awal untuk populasi $S(0) = 50$, $I(0) = 2$, $R(0) = 2$, dan parameter-parameter yang digunakan dapat dilihat pada tabel 4.2 berikut:

Parameter	Definisi	Nilai
α	Laju kelahiran individu	0.07
αx	Bayi yang terlahir dalam keadaan sehat	0.01
αy	Bayi yang terlahir dalam keadaan terinfeksi penyakit hepatitis B	0.02
β	laju terjadinya kontak dengan individu <i>infectious</i>	0.0031
σ	Laju kematian akibat terinfeksi penyakit hepatitis b	0.02
μ	Laju kematian alami	0.09
ω	Laju kesembuhan	0.01

Didapatkan titik kesetimbangan, nilai eigen, R_0 dan sifat kestabilan seperti pada tabel 4.3 berikut.

Titik Kesetimbangan	Nilai Eigen	R_0	Sifat Kestabilan
$E_1^*(S_1, I_1, R_1) = E_1^*\left(\frac{\alpha x + \alpha}{\mu}, 0, 0\right)$	$\lambda_1 = -0.0900$ $\lambda_2 = -0.0900$ $\lambda_3 = -0.0972$	$R_{01} = 0.778$ 1	Stabil

Berdasarkan nilai awal dan parameter-parameter yang terdapat pada tabel 4.2 dari model penyebaran penyakit hepatitis B diperoleh grafik laju perubahan titik kesetimbangan bebas penyakit pada gambar 4.2 berikut:



Gambar 4. 1 Laju Perubahan Titik Kesetimbangan bebas penyakit $R_0 < 1$

Berdasarkan gambar 4.2 menunjukkan bahwa grafik laju perubahan pada titik

kesetimbangan bebas penyakit dengan kasus $R_0 < 1$, Dapat dilihat pada gambar bahwa populasi *susceptible* mengalami penurunan dan jumlah populasi *infected* serta *recovered* mengalami penurunan menuju titik kesetimbangannya.

Kasus $\beta = 0.85$

Simulasi pada keadaan bebas penyakit menggunakan syarat awal untuk individu $S(0) = 50, I(0) = 5$ dan $R(0) = 2$, dan parameter-parameter yang digunakan dapat dilihat pada tabel 4.4 berikut:

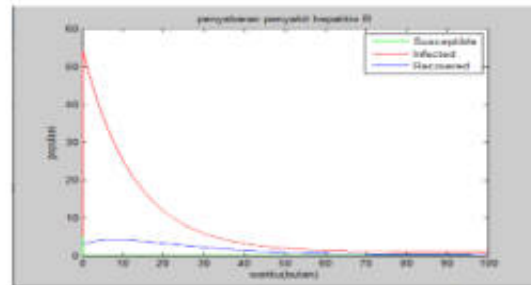
Parameter	Definisi	Nilai
α	Laju kelahiran individu	0.07
αx	Bayi yang terlahir dalam keadaan sehat	0.01
αy	Bayi yang terlahir dalam keadaan terinfeksi penyakit hepatitis B	0.02
β	laju terjadinya kontak dengan individu <i>infectious</i>	0.85
σ	Laju kematian akibat terinfeksi penyakit hepatitis b	0.02
μ	Laju kematian alami	0.07
ω	Laju kesembuhan	0.01

Didapatkan titik kesetimbangan, nilai eigen, R_0 dan sifat kestabilan seperti pada tabel 4.5 berikut:

Titik Kesetimbangan	Nilai eigen	R_0	Sifat Kestabilan

$E_1^*(S_1, I_1, R_1) =$ $E_1^*(\frac{\alpha x + \alpha}{\mu}, 0, 0)$ $= (0.8889, 0, 0)$	λ_1	$R_0 = 1.1214$	Saddle point
	λ_2		
	$\lambda_3 = 0.8914$		

Berdasarkan nilai awal dan parameter-parameter pada tabel 4.4 dari model penyebaran penyakit hepatitis B diperoleh grafik laju perubahan titik kesetimbangan bebas penyakit pada gambar 4.4 berikut:



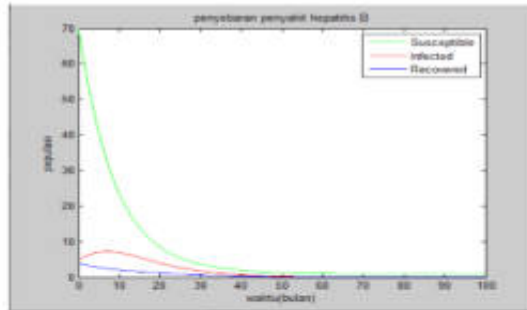
Gambar 4. 2 Grafik Laju Perubahan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit $R_0 > 1$

Pada gambar 4.4 terlihat bahwa populasi *susceptible* mengalami penurunan bergerak menuju titik kesetimbangan. Pada populasi *infected* akan mengalami peningkatan pada bulan pertama, kemudian populasi *infected* akan mengalami penurunan dikarenakan adanya kematian alami maupun kematian akibat penyakit dan juga adanya individu yang terinfeksi mengalami kesembuhan. Pada populasi *recovered* meningkat pada bulan pertama dikarenakan adanya individu terinfeksi dari populasi *infected* yang mengalami kesembuhan alami, kemudian populasi *recovered* mengalami penurunan disebabkan laju kematian alami.

4.3 Simulasi Numerik Titik Kesetimbangan Endemik

Simulasi pada keadaan endemik menggunakan syarat awal untuk individu $S(0) = 70, I(0) = 5$ dan $R(0) = 4$, dan parameter-parameter yang digunakan sama dengan tabel 4.4 kecuali β :
 Didapatkan titik kesetimbangan, nilai eigen dan sifat kestabilan seperti pada tabel 4.6 berikut:

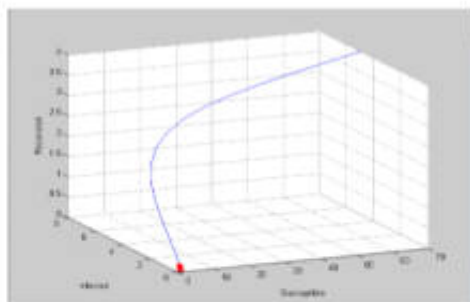
Berdasarkan nilai awal dan parameter-parameter pada tabel 4.4 dengan $\beta = 0.85$ diperoleh grafik laju perubahan titik kesetimbangan endemik pada gambar 4.6 di bawah ini:



Gambar 4. 3 Grafik Laju Perubahan Titik Keseimbangan Endemik

Pada gambar 4.6 tersebut terlihat bahwa populasi *susceptible* awalnya mengalami penurunan bergerak menuju titik kesetimbangan endemik. Hal inipun terjadi pada populasi *infected* yaitu akan mengalami penurunan hingga mencapai titik kestabiannya dikarenakan adanya kematian alami maupun kematian akibat penyakit dan juga individu yang terinfeksi mengalami kesembuhan. Pada populasi *recovered* akan meningkat pada bulan pertama dan selanjutnya mengalami penurunan menuju titik kesetimbangan endemik.

Selanjutnya kestabilan antara ketiga kelompok populasi pada titik kesetimbangan endemik dapat dilihat pada gambar 4.7 berikut:



Gambar 4. 4 Grafik 3 Dimensi Titik Keseimbangan Endemik

Pada gambar 4.7 dapat dilihat garis dengan titik awala (70 5 4) akan menuju ke titik kesetimbangan endemik $E_2^*(S_2, I_2, R_2) = (0.09411764706, 0.9176470588, 0.1310924370)$ yang ditandai dengan lingkaran merah dan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh pada tabel 4.6, titik kesetimbangan endemik memiliki periaku stabil.

5. Penutup

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Model matematika penyakit hepatitis B dengan pengaruh transmisi vertikal diperoleh:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \beta SI - \mu S + \alpha x$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI + \rho \alpha I - \mu I - \sigma I - \omega I$$

$$\frac{dR}{dt} = \omega I - \mu R$$

2. Terdapat dua titik kesetimbangan dari model matematika penyakit hepatitis B dengan pengaruh transmisi vertikal yaitu:

- a. Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_1^*(S_1, I_1, R_1) = E_1^*\left(\frac{\alpha x + \alpha}{\mu}, 0, 0\right)$$

- b. Titik kesetimbangan endemik

$$E_2^*(S_2, I_2, R_2) =$$

$$E_2^*\left(\frac{-\alpha y + \mu + \omega + \sigma}{\beta}, \frac{\beta \alpha x + \mu \alpha y + \alpha \beta - \mu^2 - \mu \omega - \mu \sigma}{\beta(-\alpha y + \mu + \omega + \sigma)}, \frac{\omega(\beta \alpha x + \mu \alpha y + \alpha \beta - \mu^2 - \mu \omega - \mu \sigma)}{\beta(-\alpha y + \mu + \omega + \sigma)}\right)$$

3. Titik kesetimbangan bebas penyakit E_0^* akan stabil jika memenuhi syarat $R_0 < 1$, serta tidak stabil (*saddle point*) apabila $R_0 > 1$, sedangkan titik kesetimbangan endemik E_1^* akan bersifat stabil.

Ucapan Terima Kasih: Saya mengucapkan terima kasih kepada pembimbing dan penguji saya yang telah memberikan saran dan dukungan dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

Daftar pustaka

1. Kumar, 2012. "Hepatitis B Virus Infection and Pregnancy: A Practical Approach." *Indian Journal of Gastroenterology* 31 (2): 43–54.
2. AT. Lopa, M. Arif, and Hardjoeno. 2018. "Analisis Kadar Albumin Serum Dengan Rasio De Ritis Pada Penderita Hepatitis B." *Indonesian Journal of Clinical Pathology and Medical Laboratory* 13 (2):
3. Kemenkes. 2016. *Profil Kesehatan Indonesia*. Jakarta: Kementerian Kesehatan Republik Indonesia.
4. M.D. Thedja, 2012. *Genetic Diversity of Hepatitis B Virus in Indonesia: Epidemiological and Clinical Significance*. Jakarta: DIC Creative.
5. P. Driessche, Van Den, and Watmough J. 2002. "Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission." *Mathematical Biosciences*
6. S. Arief, 2012. *Hepatitis Virus in: Juffrie, M.Gastroenterology-Hepatology*. Jakarta.
7. Syifa M. and Dian H. 2018a. "Prevalensi Infeksi Hepatitis B Pada Ibu Hamil Di Malang." *Jurnal Kedokteran Brawijaya*

Diterima tgl. 19 September 2024
Direvisi tgl. 7 Desember 2024
Disetujui untuk terbit tgl. 15 Desember 2024