PENYELESAIAN ANALITIS PERSAMAAN *ADVEKSI-DIFUSI* DENGAN MENGGUNAKAN METODE PEMISAHAN VARIABEL

Iin Sukma Febrianti
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo
E-mail : kimls1004012@gmail.com

Muh. Kabil Djafar [1], Herdi Budiman[2], Wayan Somayasa[3] dan La Pimpi[4],
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
E-mail : [1] kabildjafar@gmail.com, [2]herdi.budiman67@gmail.com, [3]wayan.somayasa@uho.ac.id dan [4]lapimpi.uho.mipa@gmail.com

ABSTRAK

Persamaan Adveksi-Difusi merupakan persamaan yang digunakan untuk memprediksi pergerakan polutan di dalam air. Persamaan ini merupakan persamaan diferensial parsial yang bergantung pada variabel ruang dan waktu serta dipengaruhi oleh suatu kondisi batas yang tidak diketahui. Persamaan Adveksi-Difusi dalam skripsi ini menggambarkan transfer polutan dalam suatu aliran dengan kondisi batas homogen.

Solusi analitik dari Persamaan Adveksi-Difusi diperoleh dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Metode pemisahan variabel diterapkan untuk solusi nilai awal atau masalah nilai batas dan kondisi batas pada persamaan homogen. Persamaan yang telah diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel selanjutnya akan diselesaikan menggunakan kaidah deret fourier. Deret fourier diperlukan untuk menyelesaikan masalah nilai eigen dan fungsi eigen pada solusi metode pemisahan variabel.

Hasil analisis yang diperoleh: semakin lama waktu yang dibutuhkan polutan untuk menyebar pada aliran, maka konsentrasi polutan yang menyebar akan semakin sedikit.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Parsial, Persamaan Adveksi-Difusi, Metode Pemisahan Variabel, Kondisi Batas Homogen, Deret Fourier

ABSTRACT

The Advection-Diffusion Equation is an equation used to predict the movement of pollutants in water. This equation is a partial differential equation that depends on space and time variables and affected by an unknown boundary condition. The Advection-Diffusion equation in this thesis describes the transfer of pollutants in a stream with homogeneous boundary conditions.

The analytical solution of the Advection-Diffusion Equation is obtained by using the variable separation method. Variable separation method is applied to the solution of initial value or boundary value problems and boundary conditions in homogeneous equations. Equations that have been solved using the method of separating variables then will be solved using the Fourier series rule. The Fourier series is needed to solve the problem of eigenvalues and eigenfunctions in the solution of the variable separation method.

The results of the analysis obtained: the longer it takes for the pollutant to spread in the flow, the less the concentration of the pollutant that spreads.

Keywords: Partial Differential Equation, Advection-Diffusion Equation, Method of Separation of Variables, Homogeneous Boundary Conditions, Fourier Series

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung turunan pertama atau lebih dari suatu fungsi. Persamaan diferensial diklasifikasikan dalam dua tipe yaitu persamaan diferensial biasa yang memuat turunan dari suatu fungsi satu peubah dan persamaan diferensial parsial yang memuat turunan dari suatu fungsi dengan dua atau lebih peubah bebas. Persamaan diferensial parsial digunakan untuk melakukan formulasi dan menyelesaikan permasalahan yang melibatkan fungsi-fungsi yang tidak diketahui, yang dibentuk oleh beberapa variabel seperti penjalaran suara dan panas, elektrostatika, elektrodinamika, aliran fluida, elastisitas, atau lebih umum segala macam proses yang terdistribusi dalam ruang, atau terdistribusi dalam ruang dan waktu.

Salah satu contoh persamaan diferensial parsial yaitu persamaan difusi. Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial yang merupakan representasi perpindahan suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian berkonsentarsi rendah tanpa dipengaruhi oleh kecepatan gerak fluida [1]. Untuk mengetahui berapa banyaknya polutan pada posisi x saat t haruslah menggunakan model difusi. Sedangkan persamaan adveksi merupakan suatu persamaan gelombang linear orde satu dan termasuk dalam persamaan diferensial hiperbolik yang menggambarkan mekanisme transportasi suatu gas atau zat cair dengan arah tertentu [1].

Persamaan Adveksi-Difusi merupakan persamaan yang membahas mengenai proses transportasi materi dari satu bagian ke bagian lain sebagai hasil dari gerakan molekul acak yang melibatkan proses transportasi fluida dalam bentuk aliran rata-rata atau arus yang dipengaruhi oleh gaya gravitasi atau tekanan dan berupa gerak horizontal. Persamaan ini digunakan untuk memprediksi pergerakan polutan di dalam air. Persamaan ini merupakan persamaan diferensial parsial yang bergantung pada variabel ruang dan waktu. Persamaan ini juga dipengaruhi oleh suatu kondisi batas yang tidak diketahui.

Persamaan diferensial parsial membahas tentang solusi analitik dan solusi numerik. Solusi analitik pada persamaan diferensial parsial diperoleh dengan menggunakan perhitungan secara sistematis, dan solusi yang diperoleh berupa nilai eksak. Dalam pembahasan solusi analitik, suatu persamaan diferensial parsial umumnya mengkaji masalah nilai awal dengan menggunakan d'Alembert's solution dan untuk masalah nilai batas menggunakan metode pemisahan variabel (Separation of Variable). Sehingga solusi analitik harus terdefinisi dalam sistem atau batas-batas sistem [2]. Akan tetapi, solusi analitik bukanlah proses yang mudah. Oleh karena itu, solusi numerik banyak digunakan oleh para peneliti, terutama bagi mereka yang tidak mempelajari matematika secara rinci.

Maka dari itu tujuan dari penelitian ini yaitu mengetahui penyelesaian Persamaan Adveksi-Difusi secara analitik menggunakan metode pemisahan variabel.

Tulisan ini disusun dengan sistematika sebagai berikut, pada bagian 2 membahas tentang kajian pustaka, bagian 3 membahas tentang hasil dan pembahasan dan bagian 4 penutup, yang memuat kesimpulan dan saran.

2. Kajian Pustaka

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas [3]. Persamaan diferensial parsial dibagi menjadi tiga jenis yaitu persamaan diferensial eliptik, parabolik dan hiperbolik.

2.2 Persamaan Diferensial Adveksi-Difusi

2.2.1. Hukum Kekekalan Massa

Terdapat beberapa asumsi yang digunakan untuk menurunkan persamaan Hukum Kekekalan Massa. Pertama, diasumsikan aliran berada dalam satu dan hanya melibatkan variabel ruang x saja pada waktu t. Kedua, diasumsikan aliran tenang tanpa gangguan dari luar dan kecepatan diabaikan. Ketiga, diasumsikan tempat air kedap atau tertutup rapat. Massa total pelacak kimia pada selang $[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2]$ pada waktu t dapat dinyatakan dengan

$$M = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx \tag{1}$$

Perubahan massa pada $[x_1, x_2]$ diberikan dengan perbedaan flux pada $[x_1, x_2]$. Laju aliran yang melalui setiap titik (x,t) yang merupakan hasil kali massa jenis $u(x,t)$ dan kecepatan $c(x,t)$ disebut flux massa, yaitu:

$$Flux\ massa = c(x,t)u(x,t) \tag{2}$$

Dalam hal ini, kecepatan menggambarkan seberapa cepat partikel yang bergerak melewati titik x dan massa jenis u menggambarkan berapa banyak partikel kimia yang terkandung dalam aliran di setiap x. Berarti $c(x,t)$ adalah fungsi yang diketahui, sehingga Persamaan (2.13) dapat dinyatakan menjadi

$$Flux\ massa = f(u(x,t)) = c(x,t)u \tag{3}$$

Karena nilai flux $f(u)$ bergantung pada nilai u, maka Persamaan (3) dapat ditulis menjadi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}f\big(u(x,t)\big)\right] dx = 0 \tag{4}$$

Persamaan (4) mengakibatkan integran $[x_1, x_2]$ harus sama dengan nol, sehingga Persamaan (4) menjadi

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{5}$$

Persamaan (5) disebut Persamaan Hukum Kekekalan Massa.

2.2.2. Persamaan Adveksi

Andaikan terdapat sebuah polutan dalam aliran dan polutan tersebut terbawa ke hilir tanpa adanya proses difusi sedikitpun. Berarti, kecepatan $c(x,t)$ adalah konstan. Flux massa pada persamaan (2) dapat ditulis menjadi:

$$Flux\ massa = f(u) = cu \tag{6}$$

Dari Persamaan (6) dipperoleh

$$u_t + (cu)_x = 0 \tag{7}$$

Persamaan (7) disebut persamaan adveksi atau persamaan gelombang satu arah.

2.2.3. Persamaan Difusi dan Persamaan Adveksi-Difusi

Hukum Fick tentang difusi menyatakan bahwa fluks bersih sebanding dengan gradien dari u, di dalam ruang satu dimensi merupakan turunannya u_x. Pada titik ini, flux pada posisi x bergantung pada nilai u_x jika dibandingkan dengan nilai u sehingga dapat dinyatakan dengan

$$\text{Flux dari } u = f(u_x) = -Du_x \tag{8}$$

Persamaan (8) diketahui sebagai Hukum Fick (Hukum Pertama Fick tentang Difusi) dengan D menyatakan koefisien difusi. Dengan menggunakan flux Persamaan (8) maka Persamaan (6) menjadi:

$$u_t = Du_x \tag{9}$$

Secara umum, contoh fluida yang mengalir akan dipengaruhi prose adveksi dan difusi secara bersamaan, sehingga nilai fluksnya menjadi $f(u, u_x) = c - Du_x$ dan menghasilkan persamaan Adveksi-Difusi

$$u_t + cu_x = Du_{xx} \tag{10}$$

2.3 Kaidah Umum Penyelesaian Analitik Persamaan Diferensial Parsial

Penyelesaian analitik model matematika adalah penyelesaian yang didapat dari prosedur aljabar terhadap persamaan dasar sehingga didapat suatu penyelesaian yang berlaku untuk setiap titik dalam domain yang menjadi perhatian [2].

2.3.1. Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas

Persamaan diferensial parsial mempunyai lebih dari satu penyelesaian. Dengan demikian, perlu adanya kondisi yang diformulasikan, sehingga persamaan tersebut memiliki solusi yang tunggal (*unique*) [4]. Terdapat dua macam kondisi yang digunakan yaitu nilai awal dan syarat batas. Untuk mendapatkan penyelesaian analitik dari persamaan diferensial parsial dengan nilai awal, maka harus ditentukan terlebih dahulu penyelesaian masalah nilai awal dengan menggunakan metode *d'Alembert's Solution*. Dalam menentukan penyelesaian masalah nilai batas, salah satu metode penyelesaiannya menggunakan metode pemisahan variabel. Masalah nilai batas melibatkan suatu persamaan diferensial parsial dan semua penyelesaian yang memenuhi syarat yang dinamakan syarat batas [5].

Solusi nontrivial dalam masalah nilai batas, biasa disebut dengan nilai eigen (*eigen value*). Nilai eigen sangat penting dalam mencari solusi persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode pemisahan variabel (*separation of variable*) [6].

2.3.2. Deret Fourier

Strauss (1992) menyebutkan bahwa, misalkan x terletak pada interval $0 < x < L$, sedemikian sehinStrauss (1992) menyebutkan bahwa, misalkan x terletak pada interval $0 < x < L$, sedemikian sehingga terdapat suatu deret sinus yang konvergen menuju suatu fungsi $\phi(x)$ yang didefiniskan seperti persamaan berikut.

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{11}$$

dengan A_n adalah koefisien dari deret sinus, sedangkan $\phi(x)$ adalah suatu fungsi tertentu.

2.3.3. Pemisahan Variabel

Metode pemisahan variabel adalah teknik klasik yang efektif untuk menyelesaikan beberapa tipe dari persamaan diferensial parsial. . Misal fungsi $U = U(x,t)$. Untuk menentukan solusi, $U(x,t)$ bisa ditulis dengan variabel terpisah $U(x,t) = X(x)T(t)$. Selanjutnya, dilakukan subtitusi dari bentuk $U(x,t) = X(x)T(t)$ ke persamaan deferensial. Dengan cara ini akan dihasilkan solusi persamaan untuk persamaan diferensial parsialnya[6].

Metode pemisahan variabel diterapkan untuk solusi nilai awal atau masalah nilai batas dan syarat batas pada persamaan homogen.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1.1. Persamaan Difusi-Adveksi Sebagai Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan yang digunakan merujuk pada persamaan yang sebelumnya terdapat pada jurnal yang diteliti oleh Purnaditya (2020). Menurut Purnaditya, fenomena aliran fluida dapat dinyatakan dalam bahasa matematika. Fenomena aliran fluida menghasilkan suatu kombinasi yang sangat berguna dalam menyusun dasar persamaan dasar mekanika fluida yaitu persamaan kekekalan massa, energi dan momentum. Persamaan dasar mekanika fluida juga dapat diturunkan pada penurunan persamaan dasar adveksi-difusi dalam transportasi polutan.

Bentuk umum persamaan Adveksi-Difusi adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{12}$$

u : konsentrasi (ppm)
c : kecepatan aliran (m/s)
D : Koefisien difusi (m/s^2)

dengan

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0 \tag{13}$$

dan nilai awal

$$u(x,0) = f(x), 0 < x < L \tag{14}$$

3.1.2. Solusi Analitik Persamaan Adveksi-Difusi

Dengan menggunakan metode pemisahan variabel penyelesaian Persamaan (12) dapat dituliskan sebagai

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{15}$$

Dengan $X(x)$ adalah fungsi yang tergantung pada variabel x dan $T(t)$ adalah fungsi yang bergantung pada veriabel t.

Jika (15) di turunkan sedemikian rupa kemudian di subtitusikan ke Persamaan (12), maka akan diperoleh:

$$\mathrm{X(x)T'(t) + cX'(x)T(t) = DX''(x)T(t)} \quad (16)$$

Persamaan (16) dibagi oleh $-\mathrm{X(x)T(t)}$, maka akan diperoleh:

$$-\frac{\mathrm{T'(t)}}{\mathrm{T(t)}} = \frac{\mathrm{-DX''(x) + cX'(x)}}{\mathrm{X(x)}} \quad (17)$$

Pada Persamaan (17), melihat bahwa ruas kiri bergantung pada t, sedangakan ruas kanan bergantung pada x. Karena kedua ruas harus sama, maka nilainya haruslah konstan, misalkan k. Karena pada akhir pembahasan bertujuan untuk memperoleh solusi non trivial atau solusi tak nol, maka nilai k dapat dimisalkan menjadi $\mathrm{k} = \lambda^2$

$$-\frac{\mathrm{T'(t)}}{\mathrm{T(t)}} = \lambda^2 \quad (18)$$

$$\frac{\mathrm{-DX''(x) + cX'(x)}}{\mathrm{X(x)}} = \lambda^2 \quad (19)$$

Penyelesaian Persamaan (18) dan Persamaan (19) maka $\mathrm{u(x,t)}$ harus memenuhi nilai awal dan syarat batas pada Persamaan (13) dan Persamaan (14). Dari persamaan (19) diperoleh

$$\mathrm{DX''}(x) - cX'(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad (20)$$

Dengan menggunakan dugaan solusi, $X(x) = e^{rx}$ yang kemudian diturunkan, maka Persamaan (20) dapat diperoleh

$$Dr^2e^{rx} - cre^{rx} + \lambda^2 e^{rx} = 0$$

$$(Dr^2 - cr + \lambda^2)e^{rx} = 0$$

Karena $\mathrm{e^{rx}} \neq 0, \forall \mathrm{x} \in \Re$, maka $\mathrm{Dr^2 - cr + \lambda^2 = 0}$ disebut persamaan karateristik dari persamaan diferensial. Akar persamaan karateristik dari persamaan diferensial adalah:

$$r_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4D\lambda^2}}{2D} \quad (21)$$

Misalkan $\alpha = c^2 - 4D\lambda^2$ adalah diskriminan dari Persamaan (21), maka terdapat tiga kasus

- $(\alpha > 0)$, akar karateristik real dan berbeda, sebut r_1 dan $r_2$dengan $r_1 \neq r_2$. Diperoleh dua akar yang bebas linear. Sehingga solusi umum yaitu:
  $$X(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$
  Dengan solusi khusus yang diperoleh dengan mencari nilai dari C_1 dan C_2 yang disubtitusikan pada syarat batasnya, sehingga hasil yang diperoleh yaitu tidak ada solusi tak trivial untuk $\alpha > 0$.
- $(\alpha = 0)$, karena $\alpha = c^2 - 4D\lambda^2 = 0$,
  $$\left(\sqrt{D}r - \frac{c}{2\sqrt{D}}\right) = 0$$
  Maka persamaan karateristik mempunyai akar real dan sama. $r = \frac{c}{2D}$. Dengan r_1 dan r_2 merupakan solusi bebas linear, sehingga solusi Persamaan (21) bila akar karateristiknya dimisalkan r, yaitu:
  $$X(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$
  dari hasil di atas apabila disubtitusikan ke syarat batas, maka hasil yang diperoleh tidak ada solusi tak trivial.
- $(\alpha < 0)$, dalam hal ini, $c^2 - 4D\lambda^2 < 0$.
  Maka, akar-akar adalah dua bilangan kompleks yang saling konjugat.
  $$r_{1,2} = \frac{c^2 \pm \sqrt{-(c^2 - 4D\lambda^2)}}{2D}$$
  $$r_{1,2} = \frac{c^2 \pm i\sqrt{4D\lambda^2 - c^2}}{2D}, dengan\ i = \sqrt{-1}$$
  Misal akar karateristik dari Persamaan (20) adalah akar kompleks:
  $$r_{1,2} = \beta \pm i\gamma$$
  dengan β dan γ adalah bilangan real
  $$\beta = \frac{c}{2D}, \gamma = \frac{\sqrt{4D\lambda^2 - c^2}}{2D}$$
  Ini memberikan dua solusi bebas linear. Jadi, solusi umumnya adalah (4.1)
  $$X(x) = e^{\beta x}(C_1 \cos \gamma x + C_2 \sin \gamma x)$$
  Dari hasil di atas apabila di subtitusikan ke syarat batas di peroleh
  $$X(0) = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = 0$$
  $$X(0) = C_1 = 0$$
  Maka diperoleh $C_1 = 0$, jadi
  $$X(x) = e^{\beta x} C_2 \sin \gamma x.$$
  $\mathrm{X(L) = e^{\beta L}(C_1 \cos \gamma L + C_2 \sin \gamma L)}$, karena $\mathrm{C_1 = 0}$, maka
  $\mathrm{e^{\beta L} C_2 \sin \gamma L = 0}$ atau $\sin \gamma \mathrm{L} = 0$, untuk memperoleh solusi tak trivial $\mathrm{X(x)} \neq 0$, ambil $\mathrm{C_2} \neq 0$, sehingga nilai eigennya harus memnuhi
  $$\sin \gamma \mathrm{L} = 0$$
  $$\gamma \mathrm{L} = \mathrm{n}\pi \rightarrow \gamma = \frac{\mathrm{n}\pi}{\mathrm{L}}$$
  $$\rightarrow \lambda^2 = \frac{\left(\frac{2\mathrm{Dn}\pi}{\mathrm{L}}\right)^2 + \mathrm{c}^2}{4\mathrm{D}}, \quad \mathrm{n} = 1,2,3, \ldots$$
  Jadi nilai eigenya r_1 dan r_2 adalah positif, maka dari Persamaan (20) diperoleh fungsi eigen yaitu:
  $$X(x) = e^{\beta x} C_2 \sin \gamma x$$
  $$X(x) = e^{\beta x} C_2 \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1,2,3, \ldots \quad (22)$$
  di mana fungsi eigen merupakan penyelesaian dari Persamaan (20) yang memenuhi syarat batas.

Persamaan (18) dapat ditulis menjadi:

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \quad (23)$$

Persamaan (23) adalah persamaan diferensial homogen tingkat satu yang linear dengan koefisien konstanta. Maka dapat diselesaikan dengan menggunakan dugaan solusi $T(t) = e^{rt}$ yang kemudian diturunkan. Kemudian disubtitusikan ke Persamaan (23), maka diperoleh:

$$e^{rt}(r + \lambda^2) = 0$$

$$\rightarrow r + \lambda^2 = 0 \rightarrow r = -\lambda^2$$

Dengan $\lambda^2 = \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}$, sehingga solusi umum dari Persamaan (22), adalah:

$$T(t) = Ae^{-\left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}t\right)} \quad (24)$$

dengan A adalah konstanta.

Dengan mensubstitusikan Solusi $X(x)$ dan $T(t)$ pada Persamaan (22) dan Persamaan (24) ke Persamaan Adveksi-Difusi pada Persamaan (15), maka penyelesaian Persamaan Adveksi-Difusi satu dimensi yaitu:

$$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{\frac{c}{2D}x - \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}t} \quad (25)$$

di mana B_n merupakan konstanta yang dicari dengan menggunakan syarat awal dan deret Fourier. Sehingga diperoleh nilai B_n yaitu

$$B_n = -2f(x_0)e^{-\frac{c}{2D}x}\left(\frac{2DcL \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + 4D^2 n\pi \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{c^2L^2 + 4D^2n^2\pi^2}\right)$$

3.1.3. Analisis Keabsahan Penyelesaian Persamaan Adveksi-Difusi

Untuk memeriksa keabsahan/validitas dari solusi yang diperoleh maka akan dilakukan analisis keabsahan penyelesaian pada Persamaan (25) sehingga memenuhi Persamaan (12), nilai awal dan syarat batas.

Untuk menguji keabsahan solusi analitik yang diperoleh maka solusi analitik diubah ke bentuk persamaan awal dengan mencari turunan-turunannya. Sehingga diperoleh,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{1}^{\infty} B_n e^{\frac{c}{2D}x - \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}t}\left[\left(-\frac{4D^2n^2\pi^2 + c^2L^2}{4DL^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{1}^{\infty} B_n e^{\frac{c}{2D}x - \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}t}\left[\frac{2Dn\pi\cos\frac{n\pi x}{L} + cL\sin\frac{n\pi x}{L}}{2DL}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{1}^{\infty} B_n e^{\frac{c}{2D}x - \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}t}\left[-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\sin\frac{n\pi x}{L} + \frac{cn\pi}{DL}\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{c^2}{4D^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

Kemudian hasil yang diperoleh di subtitusikan ke Persamaan (12), sehingga memperoleh

$$\sum_{1}^{\infty} B_n e^{\frac{c}{2D}x - \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}t}\left(\left(\frac{-4D^2n^2\pi^2 + c^2L^2}{4DL^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{L} + \frac{cn\pi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \sum_{1}^{\infty} B_n e^{\frac{c}{2D}x - \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}t}\left(\left(\frac{-4D^2n^2\pi^2 + c^2L^2}{4DL^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{L} + \frac{cn\pi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Dari hasil dapat diperhatikan bahwa ruas kiri dan ruas kanan memiliki persamaan yang sama sehingga dapat disimpulkan bahwa solusi pada Persamaan (25) memenuhi bentuk awal pada Persamaan (12).

Setelah dilakukan pengecekan keabsahan solusi Persamaan (25) terhadap persamaan awal, kemudian dilakukan pengecekan terhadap nilai awal $u(x,0) = f(x)$. Dengan mensubsitusikan nilai $t = 0$, sehingga diperoleh:

$$u(x,0) = \sum_{1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{\frac{c}{2D}x - \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}(0)}$$

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{\frac{c}{2D}x}$$

Artinya, apapun solusi yang dihasilkan dari $u(x,t)$, jika disubsitusikan $t = 0$, maka akan menghasilkan suatu fungsi yang bergantung pada x dan dapat dianggap sebagai $f(x)$.

Terakhir, akan diperiksa apakah solusi pada Persamaan (25) memenuhi syarat batas $u(0,t) = u(L,t) = 0$

- Untuk syarat batas $u(0,t) = 0$

  $$u(0,t) = \sum_{1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi(0)}{L} e^{\frac{c}{2D}(0) - \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}t}$$

  $\sin\frac{n\pi(0)}{L} = 0$, sehingga perkalian dengan 0 akan menghasilkan

  $$u(x,t) = 0$$

  Hal ini membuktikan solusi memenuhi kondisi batas $u(0,t) = 0$.

- Untuk syarat batas $u(L,t) = 0$

  $$u(L,t) = \sum_{1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi(L)}{L} e^{\frac{c}{2D}(L) - \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}t}$$

  $$u(L,t) = \sum_{1}^{\infty} B_n \sin n\pi\, e^{\frac{c}{2D}(L) - \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}t}$$

  Dikarenakan $\sin\pi = 0$, maka untuk setiap π nilai dari $\sin n\pi = 0$. Sehingga perkalian dengan 0 akan menghasilkan

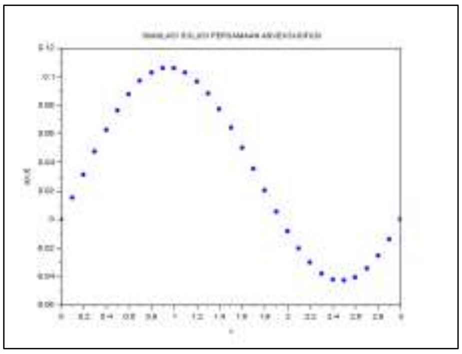
  $$u(x,t) = 0$$

  Hal ini membuktikan solusi memenuhi kondisi batas $u(L,t) = 0$.

3.1.4. Simulasi Solusi Analitik Persamaan Adveksi-Difusi

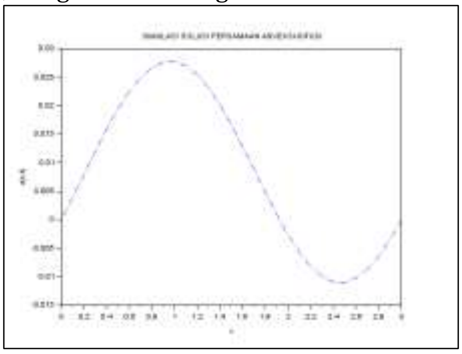
Berikut ini akan dilakukan simulasi solusi analitik persamaan Adveksi-Difusi dengan menggunakan domain pada kondisi batas yaitu $0 < x < L = 3$ dan $t = 1$, yang dapat dicari dengan menggunakan program Scilab. Dengan memasukan nilai, $D = 1{,}46 \cdot 10^{-5}\,\frac{cm^2}{s}$, dan $c = 1{,}6 \cdot 10^{-4}\,\frac{m}{s}$, dan nilai dari $n = 1{,}2{,}3 \cdots 10$ dengan $\Delta x = 0{,}1$. Selain itu, untuk menentukan gambar solusi Persamaan (4.26) perlu didefinisikan $f(x_0)$. Dalam hal ini dimisalkan

$f(x_0) = 1$. Maka hasilnya dapat dilihat pada grafik berikut:



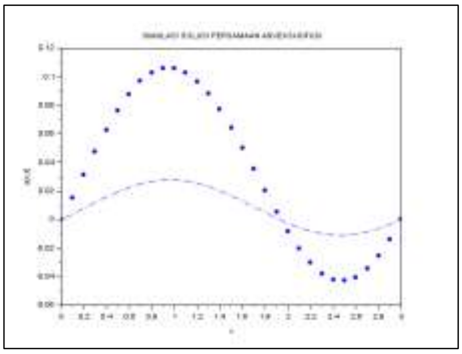
Gambar 1. Simulasi Solusi Persamaan Adveksi Difusi saat $t = 1$

Solusi persamaan Adveksi-Difusi juga dapat disimulasikan dengan menggunakan kondisi batas $t = 2$, dengan hasil sebagai berikut:



Gambar 2. Simulasi Solusi Persamaan Adveksi Difusi saat $t = 2$

Jika kedua hasil simulasi digabungkan maka akan diperoleh gambar seperti berikut:



Gambar 3. Simulasi Solusi Persamaan Adveksi Difusi saat $t = 1$ dan $t = 2$

Dari hasil simulasi dapat diperhatikan semakin besar waktu (t) yang digunakan maka nilai $u(x, t)$ semakin mendekati 0. Sehingga dapat dikatakan bahwa semakin meningkat t maka konsentrasi polutan dalam suatu aliran akan semakin mengecil bahkan mendekati 0.

4. Kesimpulan dan Saran

4.1. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan dalam skripsi ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Solusi analitik dari Persamaan Adveksi-Difusi dengan menggunakan metode pemisahan variabel, yaitu:

$$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{\frac{c}{2D}x - \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 + c^2}{4D}t}$$

dengan

$$B_n = -2f(x_0)e^{-\frac{c}{2D}x} \left(\frac{2DcL\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + 4D^2 n\pi\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{c^2L^2 + 4D^2n^2\pi^2}\right)$$

2. Simulasi solusi Persamaan Adveksi-Difusi menunjukkan bahwa semakin besar nilai t maka konsentrasi polutan $(u(x,t))$ pada suatu aliran akan semakin mengecil bahkan mendekati 0.

4.2. Saran

Saran yang disampaikan pada skripsi ini, penyelesaian persamaan Adveksi-Difusi menggunakan metode pemisahan variabel, untuk penelitian selanjutnya, penyelesaian persamaan Adveksi-Difusi dapat dicoba menggunakan metode numerik atau mengembangkan metode lainnya

Ucapan Terima Kasih. Saya ingin mengucapkan terimakasih kepada dosen pembimbing saya yang sudah menyisihkan waktunya untuk membimbing dan memberikan masukan serta dorongan untuk membantu saya menyelesaikan penelitian ini, dan saya ucapkan terima kasih juga kepada dosen-dosen FMIPA Jurusan Matematika yang telah memberikan bekal banyak ilmu pengetahuan dan juga ilmu pengalaman hidup yang sangat bermanfaat.

Daftar Pustaka

R. J. LeVeque, *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2004.

R. Munir, *Metode Numerik*. Bandung: Informatika, 2015.

R. J. Pamuntjak and W. Santosa, *Persamaan Diferensial* Biasa. Bandung: ITB, 1990.

W. A. Strauss, *Partial Differential Equations An Introduction.pdf*. New York: John Wiley & Sons.Inc., 1992.

M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*. McGraw-Hill Education, 1983.

R. Nagle, E. Saff, and A. Snider, *Fundamentals of*

Differential Equations and Boundary Value Problems. Pearson, 1996.

N. P. Purnaditya, “Penerapan Konsep Lagrangian-Eularian Dalam Pengembangan Dasar Model Matematika Hidraulika Aliran dan Transportasi Polutan: Sebuah Kajian Literatur,” *J. Fondasi*, vol. 9, no. 2, pp. 175–187, 2020, doi: 10.36055/jft.v9i2.9005.