ESTIMASI PARAMETER DARI DISTRIBUSI WEIBULL BERDASARKAN SAMPEL TERSENSOR TIPE II PROGRESIF

Muhammad Syadam Purwanto
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
E-mail: muhammadsyadam1218@gmail.com

Wayan Somayasa[1,a)], Alfian[1,b)] dan Rahmalia Sahupala[2,c)]
[1)]Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
[2)]Program Studi Statistika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
E-mail: [a)]wayan.somayasa@uho.ac.id , [b)]alfian@uho.ac.id dan [c)]rahmaliashupala@uho.ac.id

ABSTRAK

Analisis uji hidup merupakan salah satu kumpulan dari prosedur statistika untuk analisis data dimana variabelnya adalah waktu sampai terjadinya kejadian. Pada analisis data uji hidup objek penelitian adalah penyelidikan tentang daya tahan hidup atau keandalan, yang menghasilkan data waktu hidup (survival). Data waktu hidup dari sejumlah n objek penelitian diperoleh melalui hasil penyensoran karena keterbatasan waktu dan biaya. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan estimasi parameter dari distribusi Weibull berdasarkan sampel tersensor tipe II progresif dengan melakukan transformasi varibel distribusi Weibull menjadi variabel distribusi Nilai Ekstrim. Berdasarkan transformasi tersebut, maka akan dilakukan estimasi parameter distribusi nilai ekstrim dengan metode maximum likelihood estimation (MLE) dan didapatkan penyelesaian yang nonlinier, sehingga prosedur dilanjutkan dengan metode Newton-Rapshon untuk memperoleh penyelesaiannya. Hasil estimasi parameter distribusi nilai ekstrim yang diperoleh akan ditransformasi kembali menjadi parameter distribusi Weibull. Dengan menggunakan software R, untuk sampel tersensor tipe II progresif menggunakan data waktu hidup mencit diperoleh nilai duga untuk theta yaitu 9.19 dan beta yaitu 1.41715.

Kata Kunci: Data uji hidup, Penyensoran Tipe II Progresif, Metode Newton-Raphson, Distribusi Weibull, Distribusi Nilai Ekstrim, Maximum Likelihood Estimation (MLE)

ABSTRACT

Lifetime test analysis is a collection of statistical procedures for data analysis where the variable is the time to event. On the lifetime test analysis object of research is inquiry about of the survival or reliability, which generated time data (survival). Lifetime data from a number n of research items obtained through the resuld of censored because limitation time and cost. The purpose of this study was to determine the parameter estimation of the Weibull distribution based on type II progessive censored samples by transforming the Weibull distribution variables into Extreme Value distribution variables. Based on this transformation, an estimation of the Extreme Value distribution parameter will be carried out using the maximum likelihood estimation (MLE) method and a nonlinear solution will be obtained, so the procedure is continued with the Newton-Rapshon method to obtain the solution. The estimation results of the Extreme Value distribution parameter obtained will later be transformed back into the Weibull distribution parameter. By using software R, for the type II progressive censored using life time data of mencit is obtained likelihood value for theta is 9.19 *and beta is* 1.41715.

***Keywords**: lifetime test data, type II censored, type I censored, Newton-Raphson method, Weibull distribution, Extreme Value distribution, maximum likelihood estimation (MLE)*

1. Pendahuluan

Ilmu statistika telah mengalami perkembangan yang sangat pesat, ditandai dengan adanya penemuan-penemuan baru tentang metode inferensi yang meliputi estimasi, pengujian hipotesis dan peramalan yang digunakan untuk menganalisis suatu permasalahan. Salah satunya adalah analisis data uji hidup yang digunakan untuk menyelidiki daya tahan/waktu hidup suatu unit atau komponen pada keadaan operasional tertentu. Ruang lingkup penggunaan analisis data uji hidup diantaranya adalah dalam bidang teknik, biologi, fisika, pertanian, kedokteran dan industri. Berbagai penelitian tersebut akan menghasilkan data yang berhubungan dengan waktu hidup dari suatu item. Data waktu hidup merupakan variabel acak tidak negatif. Analisis statistika yang di gunakan untuk menganalisis data waktu hidup disebut analisis tahan hidup (*survival analysis*). Analisis tahan hidup mencakup berbagai teknik statistika yang berguna untuk menganalisis berbagai macam variabel acak. Variabel acak pada analisis tahan hidup berupa daya tahan (*survival time*), waktu kegagalan (*failure time*) atau waktu hidup (*life times*). (Collect,1997).

Dalam pengujian pada analisis data uji hidup, pelaku eksperimen mungkin tidak selalu memperoleh informasi lengkap tentang waktu kegagalan untuk semua unit eksperimen. Analisis data uji hidup berbeda dari analisis data lain karena pada analisis data uji hidup data diperoleh melalui proses penyensoran. Data yang diperoleh dari eksperimen semacam itu disebut data tersensor yang bertujuan untuk menghemat waktu pengujian dan biaya. Penyensoran dilakukan untuk menyeimbangkan antara total waktu yang dihabiskan untuk percobaan, jumlah satuan yang digunakan dalam percobaan dan diinginkan inferensi statistik berdasarkan hasil percobaan (Kim, C dkk.2011).

Pada penelitian ini akan membahas mengenai penyensoran tipe II progresif. Sensor tipe II progresif merupakan sebuah pengembangan dari sensor tipe II. Secara singkat dapat digambarkan sebagai berikut, misalkan n item yang diamati ditempatkan pada percobaan uji ketahanan secara bersamaan. Pada penyensoran tahap pertama pengamatan akan dihentikan jika ditemukan r_1 item mati, sehingga item yang masih bertahan adalah $n - r_1$ item. Selanjutnya dilakukan pengurangan sebanyak n_1 item dari $n - r_1$ item yang masih tersisa. Pada penyensoran tahap II dilakukan pengamatan terhadap $n - r_1 - n_1$ item dimana pengamatan akan dihentikan jika ditemukan r_2 item mati, sehingga item yang masih bertahan adalah $n - r_1 - n_1 - r_2$ item dan begitu seterusnya (Lawless,1982).

Terdapat berbagai keluarga parametrik dari model yang digunakan dalam analisis data uji hidup dan pemodelan umur atau kegagalan proses. Diantaranya adalah model distribusi Weibull dan distribusi nilai ekstrim. Model distribusi Weibull banyak digunakan sebagai model untuk berbagai jenis komponen, seperti komponen mobil, bahkan sering juga digunakan dalam bidang medis, seperti penelitian tumor pada manusia dan sebagainya (Lawless, 2011). Model distribusi nilai ekstrim juga disebut distribusi Gumbel karena ditemukan oleh E. J. Gumbel pada tahun 1958. Model distribusi nilai ekstrim tidak berhubungan langsung dengan distribusi uji hidup, melainkan distribusi ini merupakan hasil transformasi dari distribusi Weibull.

Distibusi Weibull ditansformasi menjadi distibusi nilai ektrim agar memudahkan saat melakukan inferensi parameter. Distribusi ini dapat digunakan untuk mempermudah pengerjaan estimasi parameter distribusi Weibull, karena parameter lokasi dan parameter skala dari distribusi nilai ekstrim yang sebelumnya diperoleh dari transformasi distribusi Weibull dapat dengan mudah ditransformasikan kembali menjadi parameter distribusi Weibull.

Dalam berbagai distribusi yang digunakan dalam analisis data uji hidup tentunya terdapat parameter yang tidak diketahui. Parameter merupakan suatu konstanta yang tidak diketahui yang menggambarkan karakteristik dari suatu populasi. Karena nilainya tidak diketahui, maka perlu dilakukan pendugaan parameter atau estimasi parameter. Estimasi parameter adalah penaksiran terhadap nilai-nilai parameter populasi berdasarkan data atau sampel yang diambil dari populasi. Salah satu metode yang umum digunakan untuk mengestimasi parameter adalah *maximum likelihood estimation* (MLE). MLE merupakan suatu metode pendugaan parameter yang memaksimalkan fungsi *likelihood*. Namun, dibeberapa kasus model distribusi terdapat fungsi yang berbentuk nonlinier sehingga tidak bisa diselesaikan secara analitik, oleh karena itu untuk menyelesaikannya digunakan pendekatan secara numerik, seperti metode Newton-Rapshon.

Pada bagian dua dibahas tentang konsep dasar analisis data uji hidup yang berisi tentang fungsi *survival*, konsep penyensoran serta pengertian dan sifat-sifat dari distribusi Weibull dan distribusi Gumbel. Selanjutnya pada bagian tiga dibahas hasil penelitian yang meliputi prosedur estimasi parameter distribusi Weibull berdasarkan sampel tersensor tipe II progresif. Paper diakhiri dengan penutup berisi kesimpulan dan saran pada bagian empat.

2. Kajian Pustaka

2.1 Konsep Dasar Analisis Uji Hidup

Analisis uji hidup adalah kumpulan prosedur statistika yang digunakan untuk menganalisis data uji hidup, yaitu data yang diperoleh dari hasil pengamatan terhadap waktu sampai terjadinya suatu peristiwa atau kejadian tertentu (*time until an event occurs*) (Collect,1997). Menurut Harlan (2017), peristiwa atau kejadian tertentu tersebut biasanya disebut sebagai kegagalan (*failure*). Dalam analisis uji hidup variabel waktu sampai munculnya kejadian disebut sebagai waktu hidup (*lifetime*), waktu ketahanan (*survival time*) dan waktu kegagalan (*failure time*) (Lawless,1982).

Analisis uji hidup digunakan untuk menyelidiki ketahanan produksi suatu item atau pemodelan tentang daya tahan individu terhadap suatu penyakit setelah didiagnosis (Lawless,1982).

Menurut Lawless (1982), jika T merupakan variabel acak tidak negatif yang mewakili waktu hidup suatu populasi dan $f(t)$ merupakan fungsi kepadatan peluang dari T maka fungsi distribusi kumulatif (*cumulative distribution function* disingkat cdf) dari T dinyatakan sebagai berikut.

$$F(t) := P\{T \leq t\} = \int_0^t f(t)dt \qquad (2.1)$$

2.1.1 Fungsi Survival atau Fungsi Ketahanan

Definisi 2.1 (Collect, 1997) Fungsi survival, $S(t)$ didefinisikan sebagai peluang suatu item bertahan hidup sekurang-kurangnya t,

$$\begin{aligned} S(t) &= P(T \geq t) \\ &= 1 - F(t) \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Oleh karena itu, fungsi ketahanan dapat digunakan untuk merepresentasikan peluang suatu item bertahan hidup melampaui waktu tertentu.

Menurut Harlan (2017), karakteristik fungsi *survival* $S(t)$ sebagai berikut:

- $S(0) = 1$, yaitu pada keadaan awal belum terdapat item yang mengalami kegagalan atau $P\{T \geq 0\} = 1$.
- $S(\infty) = 0$, yaitu jika secara teoritis waktu pengamatan diperpanjang tanpa batas, suatu saat tidak ada lagi item yang betahan hidup.

2.1.2 Fungsi *Hazard*

Fungsi *hazard* digunakan untuk menyatakan kegagalan dari suatu kejadian seperti kematian yang terjadi pada waktu t. Fungsi *hazard* juga dapat dinyatakan sebagai laju kegagalan dari suatu item.

Definisi 2.2 (Collect, 1997) Fungsi *hazard* atau fungsi kegagalan, $h(t)$ dari variabel *lifetime* T adalah

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t\}}{\Delta t} \\ &= F'(t)\frac{1}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} \end{aligned} \qquad (2.5)$$

2.2 Penyensoran

Saat melakukan penelitian untuk mendapatkan data uji hidup, ada beberapa item yang tidak teramati sampai batas waktu yang telah ditentukan. Hal ini dikarenakan apabila menunggu semua item mengalami suatu kejadian sampai mendapatkan data yang lengkap, maka akan membutuhkan waktu yang lama sehingga pengamatan tidak efisien dan mengakibatkan biaya yang dikeluarkan sangat besar dan juga membutuhkan waktu yang lama. Untuk mengatasi masalah tersebut maka perlu adanya penyensoran (Fitriana,2016).

Adapun jenis penyensoran yang digunakan pada penelitian ini adalah penyensoran tipe II progresif**.** Penyensoran tipe II progresif adalah sebuah generalisasi dari penyensoran tipe II yang membedakan adalah pada penyensoran tipe II progresif penyensoran dilakukan beberapa tahap. Dalam kasus ini, pada tahap pertama misalkan terdapat r_1 item yang mengalami kegagalan dari n item yang diamat. Maka, tersisa $n - r_1$ item yang belum gagal. Dari $n - r_1$ item tersebut dikeluarkan sebanyak n_1 item sehingga tersisa $n - r_1 - n_1$ item dalam percobaan. Pada tahap kedua, misalkan terdapat r_2 item yang gagal sehingga tersisa $n - r_1 - n_1 - r_2$ yang belum gagal. Selanjutnya, dari item yang belum gagal dikeluarkan sebanyak n_2 item sehingga tersisa $n - r_1 - n_1 - r_2 - n_2$ item yang belum gagal dan seterusnya.

Misalkan diasumsikan data uji hidup saling bebas dan berdistribusi indektik dengan fungsi kepadatan peluang $f(t)$ dan fungsi *survival* $S(t)$. Untuk mempermudah pembahasan, misalkan penyensoran hanya dilakukan 2 tahap yaitu tahap pertama dan tahap kedua. Pada tahap pertama terdapat r_1 item yang gagal dengan waktu kegagalan adalah $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \cdots \leq T_{(r_1)}$. Kemudian waktu kegagalan pada tahap kedua yang dinotasikan dengan $T^*_{(1)} \leq T^*_{(2)} \leq \cdots \leq T^*_{(r_2)}$.

Fungsi kepadatan peluang bersama dari $T_{(1)}, T_{(2)}, \ldots, T_{(r_1)}$ dan $T^*_{(1)}, T^*_{(2)}, \ldots, T^*_{(r_2)}$ adalah

$$c\prod_{i=1}^{r_1} f\left(t_{(i)}\right)\left[S\left(t_{(r_1)}\right)\right]^{n_1} \times \prod_{i=1}^{r_2} f\left(t^*_{(i)}\right)\left[S\left(t^*_{(r_2)}\right)\right]^{n-r_1-n_1-r_2} \qquad (2.12)$$

di mana

$$c = \frac{n!\,(n - r_1 - n_1)!}{(n - r_1)!\,(n - r_1 - n_1 - r_2)!}$$

(Lawless,1982).

2.3 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi teoritis variabel acak kontinu yang sering digunakan untuk menganalisis suatu kehandalan suatu produk. Distribusi Weibull sering digunakan dalam analisis data uji hidup dikarenakan merupakan model data statistik yang memiliki jangkauan yang luas dengan kelebihan utamanya adalah menyajikan keakuratan kegagalan meskipun dengan sampel yang sangat kecil (Lawless,1982).

Definisi 2.4 (Walpole dan Myers,1995). Suatu variabel acak kontinu T berdistribusi Weibull $T \sim WEI(\lambda, \beta)$ di mana $\lambda > 0$ dan $\beta > 0$, jika T memiliki fungsi kepadatan peluang atau *probability density function* (pdf), yaitu:

$$f(t; \lambda, \beta) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}\exp\{-(\lambda t)^{\beta}\}, \quad t > 0, \lambda > 0, \beta > 0$$

di mana λ merupakan parameter skala yang berpengaruh terhadap ketinggian kurva pdf. Sedangkan β merupakan parameter bentuk yang berpengaruh terhadap bentuk lereng atau kemiringan kurva pdf.

Berdasarkan Persamaan (2.1) maka dapat diperoleh fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Weibull dengan parameter λ dan β adalah

$$F(t) = 1 - \exp\{-(\lambda t)^{\beta}\}.$$

Berdasarkan Definisi 2.1 maka fungsi *survival* dari distribusi Weibull adalah

$$S(t) = \exp\{-(\lambda t)^{\beta}\}.$$

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (2.5) maka diperoleh fungsi *hazard*

$$h(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}.$$

2.4 Distribusi Nilai Ekstrim

Model distribusi Gumbel tidak berhubungan langsung dengan distribusi uji hidup, melainkan distribusi ini merupakan hasil transformasi dari distribusi Weibull (Lawless, 1982). Distibusi Weibull ditransformasi menjadi distibusi nilai ektrim agar memudahkan saat melakukan inferensi terhadap parameter λ dan β.

Definisi 2.5 (Lawless, 1982) Misalkan T mengikuti distribusi Weibull $\left(T \sim WEI(\lambda, \beta)\right)$ di mana $\lambda > 0$ dan $\beta > 0$ adalah parameter skala dan parameter bentuk dengan fungsi kepadatan peluang.

$$f(t; \lambda, \beta) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1} \exp\left\{-(\lambda t)^{\beta}\right\}, t > 0$$

maka variabel $X \coloneqq \ln T$ dikatakan mengikuti distribusi nilai ekstrim $\left(X \sim GUMBEL(u, b)\right)$ dengan parameter lokasi $u = -\ln\lambda$ dan parameter skala $b = \frac{1}{\beta}$, maka fungsi kepadatan peluang dari X adalah

$$f(x; u, b) \coloneqq \frac{1}{b} \exp\left\{\frac{x-u}{b} - \exp\left\{\frac{x-u}{b}\right\}\right\}, \quad -\infty < x < \infty \qquad (2.14)$$

Berdasarkan Persamaan (2.1) maka fungsi distribusi kumulatif dari distribusi nilai ekstrim dengan parameter u dan b (Lawless, 1982) adalah

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\exp\left\{\frac{x-u}{b}\right\}\right\} \qquad (2.15)$$

Berdasarkan Definisi 2.1 dan Persamaan (2.2), maka fungsi *survival* dari distribusi nilai ekstrim (Lawless, 1982) adalah

$$S(x) = \exp\left\{-\exp\left\{\frac{x-u}{b}\right\}\right\},$$

Selanjutnya, dari Persamaan (2.5), diperoleh fungsi *hazard* dari distribusi nilai ekstrim sebagai berikut.

$$h(x) = \frac{1}{b} exp\left\{\frac{x-u}{b}\right\}.$$

2.5 Fungsi *Likelihood* untuk Distribusi Weibull dan Distribusi Nilai Ekstrim

Fungsi kepadatan peluang dari distribusi Weibull adalah sebagai berikut.

$$f(t; \theta, \beta) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right\}, \quad t > 0 \qquad (2.17)$$

di mana $\theta = \frac{1}{\lambda} > 0$ dan $\beta >$ (Lawless, 1982).

Berdasarkan Definisi 2.6, jika $X_1, X_2, \dots X_n$ merupakan sampel acak dari distribusi $GUMBEL(u, b)$, maka akan diperoleh fungsi *likelihood* sampel tersensor tipe II progresif.

Misalkan penyensoran hanya dilakukan dua tahap yaitu tahap pertama dan tahap kedua. Maka berdasarkan Persamaan (2.12) diperoleh fungsi *likelihood* untuk u dan b sebagai berikut.

$$L(u, b) = \frac{c}{b^{r_1+r_2}} \exp\left\{\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{r_1} \frac{x_i - u}{b} - \sum_{i=1}^{r_1} \exp\left(\frac{x_i - u}{b}\right) - \\ n_1 \exp\left(\frac{x_{r_1} - u}{b}\right) + \sum_{i=1}^{r_2} \frac{x_i^* - u}{b} - \\ \sum_{i=1}^{r_2} \exp\left(\frac{(x_i^* - u)}{b}\right) - \\ (n - r_1 - n_1 - r_2) \exp\left(\frac{x_{r_2}^* - u}{b}\right) \end{array}\right\} \qquad (2.18)$$

di mana

$$c = \frac{n!\,(n - r_1 - n_1)!}{(n - r_1)!\,(n - r_1 - n_1 - r_2)!}.$$

2.6 Uji *Goodness of Fit* untuk Sampel Tersensor

Menurut Swanepoel dan Gran (2002), uji *goodnes of fit* dapat digambarkan sebagai metode yang digunakan untuk memeriksa seberapa cocok sampel data dengan distribusi tertentu sebagai populasinya. Salah satu statistik uji yang digunakan untuk menguji H_0 dengan mengamati "jarak/penyimpangan" antara $F_n(x)$ dan $F_0(x)$ adalah statistik Kolmogorov-Smirov (Lawless, 1982).

Misalkan $Y_i = F(X_i)$ dan X mengalami penyensoran tipe II, sehingga terdapat nilai r untuk Y_i, di mana Y_r terbesar dan r tetap. Statistik Kolmogorov-Smirnov untuk penyensoran tipe II adalah sebagai berikut

$$_2D_{r,n} = \sup_{0 \le y \le Y_r} |F_n(y) - y|$$
$$= \max_{0 \le i \le r}\left\{\frac{i}{n} - Y_i, Y_i - \frac{i-1}{n}\right\}.$$

Adapun algoritma statistik Kolmogorov-Smirnov adalah sebagai berikut.

H_0: sampel tersensor $X_1, X_2, \dots, X_n$ berasal dari distribusi kontinu $F(x)$ yang spesifik dan $Y_i = F(X_i), i = 1,2,\dots,r$.

Hitung statistik uji $_2D_{r,n}$

Modifikasi $_2D_{r,n}$, menjadi $D_r^* = \sqrt{n}\ {}_2D_{r,n} + \frac{0.24}{\sqrt{n}}, p = \frac{r}{n} \ge 0.4$ dan $n \ge 25$

Perhatikan Tabel 2.1 dan tolak H_0 pada tingkat signifikansi α jika D_r^* melebihi nilai tabulasi α.

Tabel 2.1 Nilai $\sqrt{n}D$ untuk Penyensoran tipe II

	Significance level α							
p	0.50	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
Statistic $\sqrt{n}D$								
.2	.4923	.6465	.7443	.8155	.9268	1.0282	1.1505	1.2361
.3	.5889	.7663	.8784	.9597	1.0868	1.2024	1.3419	1.4394
.4	.6627	.8544	.9746	1.0616	1.1975	1.3209	1.4696	1.5735
.5	.7204	.9196	1.0438	1.1334	1.2731	1.3997	1.5520	1.6583
.6	.7649	.9666	1.0914	1.1813	1.3211	1.4476	1.5996	1.7056
.7	.7975	.9976	1.1208	1.2094	1.3471	1.4717	1.6214	1.7258
.8	.8183	1.0142	1.1348	1.2216	1.3568	1.4794	1.6272	1.7306
.9	.8270	1.0190	1.1379	1.2238	1.3581	1.4802	1.6276	1.7308
1.0	.8276	1.0192	1.1379	1.2238	1.3581	1.4802	1.6276	1.7308

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Estimasi *Likelihood* Maksimum

Pada bagian ini akan dilakukan estimasi *likelihood* maksimum parameter dari distribusi Weibull berdasarkan sampel tersensor tipe II progresif pada penyensoran dua tahap.

Berdasarkan fungsi lilkelihood yang diperoleh pada Persamaan (2.18) maka selanjutnya mencari fungsi $\ln L(u,b)$ yaitu,

$$\ln L(u,b) = \ln c - (r_1+r_2)\ln b + \sum_{i=1}^{r_1}\left(\frac{x_i-u}{b}\right) - \sum_{i=1}^{r_1} exp\left(\frac{x_i-u}{b}\right) - n_1 \exp\left(\frac{x_{r_1}-u}{b}\right) + \sum_{i=1}^{r_2}\left(\frac{x_i^*-u}{b}\right) - \sum_{i=1}^{r_2} exp\left(\frac{x_i^*-u}{b}\right) - (n-r_1-n_1-r_2)\exp\left(\frac{x_{r_2}^*-u}{b}\right).$$

Penduga *likelihood* maksimum untuk u dan b diperoleh dari penyelesaian

$$\frac{\partial \ln L(u,b)}{\partial u} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial \ln L(u,b)}{\partial b} = 0.$$

$$\frac{\partial \ln L(u,b)}{\partial u} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^u = \left[\frac{1}{r_1+r_2}\left(\sum_{i=1}^{r_1} exp\left(\frac{x_i}{b}\right) + n_1 \exp\left(\frac{x_{r_1}}{b}\right) + \sum_{i=1}^{r_2} exp\left(\frac{x_i^*}{b}\right)(n-r_1-n_1-r_2) + \exp\left(\frac{x_{r_2}^*}{b}\right)\right)\right]^b \quad (3.1)$$

$$\frac{\ln L(u,b)}{\partial b} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\hat{b} - \frac{1}{(r_1+r_2)}\left(\sum_{i=1}^{r_1} x_i + \sum_{i=1}^{r_2} x_i^*\right) + \left(\frac{\sum_{i=1}^{r_1} x_1 exp\left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right) + n_1 x_1 \exp\left(\frac{x_{r_1}}{\hat{b}}\right) + \sum_{i=1}^{r_2} x_i^* exp\left(\frac{x_i^*}{\hat{b}}\right) + (n-r_1-n_1-r_2) x_i^* \exp\left(\frac{x_{r_2}^*}{\hat{b}}\right)}{\sum_{i=1}^{r_1} exp\left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right) + n_1 \exp\left(\frac{x_{r_1}}{\hat{b}}\right) + \sum_{i=1}^{r_2} exp\left(\frac{x_i^*}{\hat{b}}\right) + (n-r_1-n_1-r_2)\exp\left(\frac{x_{r_2}^*}{\hat{b}}\right)}\right) = 0 \quad (3.2)$$

Setelah dilakukan estimasi parameter dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* untuk memperoleh nilai dari $\hat{u}$ dan $\hat{b}$ berdasarkan solusi pada (3.1) dan (3.2), tidak dapat diselesaikan secara analitik karena bersifat non linear. Oleh sebab itu untuk menyelesaikannya harus digunakan pendekatan secara numerik yaitu dengan menggunakan metode Newton-Rapshon sebagai berikut.

Mendefiisikan $f(b)$ dan $f'(b)$

$$f(b) = -b - \frac{1}{r_1+r_2}\left(\sum_{i=1}^{r_1} x_i + \sum_{i=1}^{r_2} x_i^*\right) + \left(\frac{\sum_{i=1}^{r_1} x_1 exp\left(\frac{x_i}{b}\right) + n_1 x_1 \exp\left(\frac{x_{r_1}}{b}\right) + \sum_{i=1}^{r_2} x_i^* exp\left(\frac{x_i^*}{b}\right) + (n-r_1-n_1-r_2)\times x_i^* \exp\left(\frac{x_{r_2}^*}{b}\right)}{\sum_{i=1}^{r_1} exp\left(\frac{x_i}{b}\right) + n_1 \exp\left(\frac{x_{r_1}}{b}\right) + \sum_{i=1}^{r_2} exp\left(\frac{x_i^*}{b}\right) + (n-r_1-n_1-r_2)\times \exp\left(\frac{x_{r_2}^*}{b}\right)}\right).$$

Mencari $f'(b)$ dengan menurunkan $f(b)$terhadap b maka diperoleh

$$\frac{-\frac{1}{b^2}\left(\sum_{i=1}^{r_1} x_i^2 \exp\left(\frac{x_i}{b}\right) + n_1 x_{r_1}^2 \exp\left(\frac{x_{r_1}}{b}\right) + \sum_{i=1}^{r_2} (x_i^*)^2 \exp\left(\frac{x_i^*}{b}\right) + (n-r_1-n_1-r_2)\left(x_{r_2}^*\right)^2 \exp\left(\frac{x_{r_2}^*}{b}\right)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{r_1} exp\left(\frac{x_i}{b}\right) + n_1 \exp\left(\frac{x_{r_1}}{b}\right) + \sum_{i=1}^{r_2} exp\left(\frac{x_i^*}{b}\right) + (n-r_1-n_1-r_2)\times \exp\left(\frac{x_{r_2}^*}{b}\right)\right)} + \frac{\frac{1}{b^2}\left(\sum_{i=1}^{r_1} x_1 exp\left(\frac{x_i}{b}\right) + n_1 x_1 \times \exp\left(\frac{x_{r_1}}{b}\right) + \sum_{i=1}^{r_2} x_i^* exp\left(\frac{x_i^*}{b}\right) + (n-r_1-n_1-r_2) x_i^* \exp\left(\frac{x_{r_2}^*}{b}\right)\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{r_1} exp\left(\frac{x_i}{b}\right) + n_1 \exp\left(\frac{x_{r_1}}{b}\right) + \sum_{i=1}^{r_2} exp\left(\frac{x_i^*}{b}\right) + (n-r_1-n_1-r_2)\times \exp\left(\frac{x_{r_2}^*}{b}\right)\right)^2} - 1,$$

sehingga diperoleh rumus iterasi Newton-Raphson sebagai berikut.

$$\hat{b}_{j+1} = \hat{b}_j - \frac{f(\hat{b}_j)}{f'(\hat{b}_j)}.$$

Jika nilai $\hat{b}$ telah diperoleh, maka nilai $\hat{u}$ dapat diperoleh, dengan mensubtitusikan nilai $\hat{b}$ ke Persamaan 3.1.

3.2 Interval Kepercayaan Parameter Populasi

Pada bagian ini dengan menerapkan sifat asimtotik dari MLE akan ditentukan bagaimana estimasi estimasi interval parameter populasi dari distribusi Weibull.

Teorema 3.1 (Nugraha, 2017) Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan sampel acak yang mempunyai fungsi kepadatan peluang $f(\boldsymbol{x_i}; \theta_1, \theta_2)$ diasumsikan bahwa $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ merupakan penduga MLE dari θ_1 dan θ_2 yang berdimensi 2 dan bersifat konsisten. Dikatakan secara asimtotik berdistribusi normal jika

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\hat{\theta}_1\\ \hat{\theta}_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}\right) \xrightarrow{D} N_2\left(0, \boldsymbol{I_0^{-1}(\theta)}\right),$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\hat{\theta}_1\\ \hat{\theta}_2\end{pmatrix} \xrightarrow{D} N_2\left(\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}, \frac{\boldsymbol{I_0^{-1}(\theta)}}{n}\right)$$

dengan $\boldsymbol{I}_0$ adalah matriks informasi Fisher

$$\boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1^2} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix}_{(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}$$

sedangkan, matrks $\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ menyatakan

$$\boldsymbol{I}_0^{-1} = \begin{pmatrix} var(\theta_1) & cov(\theta_1, \theta_2) \\ cov(\theta_1, \theta_2) & var(\theta_2) \end{pmatrix}_{(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}.$$

Selanjutnya, interval kepercayaan untuk u dan b yang ditentukan oleh $(\hat{u}, \hat{b})$ menjadi distribusi normal bivariat dengan mean (u, b) dan covarian matriks $\boldsymbol{I}_o^{-1}$. Berdasarkan Teorema (3.1) maka berlaku,

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{u} - u\\ \hat{b} - b\end{pmatrix} \xrightarrow{D} N_2(0, \boldsymbol{I}_0^{-1})$$

dengan $\boldsymbol{I}_0$ adalah matriks informasi Fisher

$$\boldsymbol{I}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u^2} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u \partial b} \\ -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b \partial u} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} \end{pmatrix}_{(\hat{u}, \hat{b})}.$$

Bentuk $\boldsymbol{I}_0$ sederhana dengan $z_i = \frac{x_i - \hat{u}}{\hat{b}}$ dan $z_i^* = \frac{x_i^* - \hat{u}}{\hat{b}}$ sehingga

$$-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2}_{(\hat{u},\hat{b})} = \frac{1}{\hat{b}^2}\Bigg(-r_1 - r_2 - 2\sum_{i=1}^{r_1} z_i + 2\sum_{i=1}^{r_1} z_i e^{z_i} + 2n_1 z_{r_1} e^{z_{r_1}} + \sum_{i=1}^{r_1} z_i^2 e^{z_i} + n_1 z_{r_1}^2 e^{z_{r_1}} - 2\sum_{i=1}^{r_2} z_i^* + 2\sum_{i=1}^{r_2} z_i^* e^{z_i^*} + 2(n - r_1 - n_1 - r_2) z_{r_2}^* e^{z_{r_2}^*} + \sum_{i=1}^{r_2} (z_i^*)^2 e^{z_i^*} + (n - r_1 - n_1 - r_2)\left(z_{r_2}^*\right)^2 e^{z_{r_2}^*}\Bigg)$$

$$-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u^2}_{(\hat{u},\hat{b})} = \frac{1}{\hat{b}^2}\left(\sum_{i=1}^{r_1} e^{z_i} + n_1 e^{z_{r_1}} + \sum_{i=1}^{r_2} e^{z_i^*} + (n - r_1 - n_1 - r_2) e^{z_{r_2}^*}\right)$$

$$-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u \partial b}_{(\hat{u},\hat{b})} = \frac{1}{\hat{b}^2}\Bigg(-r_1 - r_2 + \sum_{i=1}^{r_1} e^{z_i} + n_1 e^{z_{r_1}} + \sum_{i=1}^{r_1} z_i e^{z_i} + n_1 z_{r_1} e^{z_{r_1}} + \sum_{i=1}^{r_2} e^{z_i^*} + (n - r_1 - n_1 - r_2) e^{z_{r_2}^*} + \sum_{i=1}^{r_2} z_i^* e^{z_i^*} + (n - r_1 - n_1 - r_2) z_{r_2}^* e^{z_{r_2}^*}\Bigg)$$

Berdasarkan sifat asimtotik MLE dan dengan menggunakan teorema limit pusat, maka interval kepercayaan untuk u, b, θ dan β pada tingkat signifikansi α adalah

$$P\left\{\hat{u} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_o^{-1})_{11}} \le u \le \hat{u} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_o^{-1})_{11}}\right\} = 1 - \alpha \quad (3.3)$$

$$P\left\{\hat{b} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_o^{-1})_{22}} \le b \le \hat{b} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_o^{-1})_{22}}\right\} = 1 - \alpha \quad (3.4)$$

$$P\left\{e^{\hat{u} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_o^{-1})_{11}}} \le \theta \le e^{\hat{u} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_o^{-1})_{11}}}\right\} = 1 - \alpha \quad (3.5)$$

$$P\left\{\frac{1}{\hat{b} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_o^{-1})_{22}}} \le \beta \le \frac{1}{\hat{b} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_o^{-1})_{22}}}\right\} = 1 - \alpha \quad (3.6)$$

3.3 Aplikasi pada Data Riil

Pada bagian ini akan dilakukan analisis data dari estimasi parameter distribusi Weibull pada data waktu hidup mencit berdasarkan penyensoran tipe II progresif, kemudian akan ditentukan interval kepercayaan dari parameter distribusi Weibull serta akan ditunjukkan penerapan estimasi parameter.

Data pada tabel di bawah ini merupakan data yang akan dianalisis pada penelitian ini yang diperoleh dari data bangkitan menggunakan *software* R yang diasumsikan sebagai data waktu hidup mencit dalam bulan. Misalkan dilakukan pengamatan terhadap 50 ekor mencit sampai terjadinya kematian pada mencit yang diamati. Dari 50 ekor mencit yang diamati, pengamatan dihentikan pada penyensoran tahap pertama jika ditemukan 14 ekor mencit mati, sehingga sisa mencit yang belum mati berjumlah 36. Kemudian dari 36 mencit yang tersisa, 8 ekor mencit dipilih secara acak untuk dikeluarkan dari percobaan, sehingga pengamatan kembali dilanjutkan pada penyensoran tahap kedua dengan 28 ekor mencit yang tersisa, pengamatan dihentikan kembali jika telah ditemukan 16 ekor mencit mati.

i	t	$\frac{i}{n}$	$\frac{i-1}{n}$	Y_i	$\frac{i}{n}-Y_i$	$Y_i-\frac{i-1}{n}$
1	0.29537	0.02	0	0.00763	0.01237	0.00763
2	1.21395	0.04	0.02	0.05519	-0.01519	0.03519
3	1.39497	0.06	0.04	0.06680	-0.0068	0.02680
4	1.48406	0.08	0.06	0.07270	0.00730	0.01270
5	1.81833	0.1	0.08	0.09575	0.00425	0.01575
6	2.51614	0.12	0.1	0.14742	-0.02742	0.04742
7	2.52657	0.14	0.12	0.14822	-0.00822	0.02822
8	2.69798	0.16	0.14	0.16144	-0.00144	0.02144
9	2.78017	0.18	0.16	0.16783	0.01217	0.00783
10	2.8205	0.2	0.18	0.17098	0.02902	-0.00902
11	3.0462	0.22	0.2	0.18870	0.03130	-0.0113
12	3.04741	0.24	0.22	0.18880	0.05120	-0.0312
13	3.17771	0.26	0.24	0.19911	0.06089	-0.04089
14	3.74274	0.28	0.26	0.24420	0.03580	-0.0158
15	4.73458	0.3	0.28	0.32340	-0.0234	0.04340
16	5.17635	0.32	0.3	0.35810	-0.0381	0.05810
17	5.43789	0.34	0.32	0.37836	-0.03836	0.05836
18	5.57096	0.36	0.34	0.38857	-0.02857	0.04857
19	5.78573	0.38	0.36	0.40492	-0.02492	0.04492
20	6.14739	0.4	0.38	0.43200	-0.032	0.05200
21	6.35952	0.42	0.4	0.44760	-0.0276	0.04760
22	6.43965	0.44	0.42	0.45344	-0.01344	0.03344
23	6.46213	0.46	0.44	0.45507	0.00493	0.01507
24	6.63281	0.48	0.46	0.46738	0.01262	0.00738
25	7.24427	0.5	0.48	0.51022	-0.01022	0.03022
26	7.68148	0.52	0.5	0.53958	-0.01958	0.03958
27	7.82148	0.54	0.52	0.54874	-0.00875	0.02874
28	8.13417	0.56	0.54	0.56880	-0.0088	0.02880
29	10.1521	0.58	0.56	0.68385	-0.10385	0.12385
30	10.67032	0.6	0.58	0.70937	-0.10937	0.12937

Tabel 3.1 Data Waktu Hidup Mencit

No.	t (bulan)	No.	t^* (bulan)
1	0.29537	1	4.73458
2	1.21395	2	5.17635
3	1.39497	3	5.43789
4	1.48406	4	5.57096
5	1.81833	5	5.78573
6	2.51614	6	6.14739
7	2.52657	7	6.35952
8	2.69798	8	6.43965
9	2.78017	9	6.46213
10	2.8205	10	6.63281
11	3.0462	11	7.24427
12	3.04741	12	7.68148
13	3.17771	13	7.82148
14	3.74274	14	8.13417
		15	10.1521
		16	10.67032

Berdasarkan data pada Tabel 3.1 akan ditentukan penduga parameter θ dan β dari distribusi Weibull menggunakan (MLE), dimana akan dilakukan transformasi dari T_i dan T_i^* yang berdistribusi Weibull masing-masing menjadi $X_i = \ln T_i$ dan $X_i^* = \ln T_i^*$ yang berdistribusi nilai ekstrim. Berdasarkan Persamaan (3.1) dan (3.2) untuk menentukan parameter $\hat{u}$ dan $\hat{b}$ dari distribusi nilai ekstrim. tidak dapat diselesaikan secara analitik, maka dilakukan secara numerik dengan mengunakan Metode Newton-Raphson.

Berdasarkan metode Newton-Raphson yang dibangitkan dengan *software* R maka diperoleh nilai $\hat{b} = 0.70564$ dan $\hat{u} = 2.21811$. Selanjutnya estimasi parameter dari θ dan β dari distribusi Weibull, dimana $u = \ln\theta$ dan $b = \frac{1}{\beta}$ atau $\hat{\theta} = e^{\hat{u}}$ dan $\hat{\beta} = \frac{1}{\hat{b}}$ sehingga $\hat{\theta} = 9.19$ dan $\hat{\beta} = 1.41715$.

Sebelum melanjutkan analisis untuk estimasi interval akan lebih dahulu dilakukan uji *goodness of fit* untuk mengecek apakah data yang digunakan dalam penelitian ini berasal dari popolasi distribusi Weibull atau tidak dengan menggunakan statistik Kolmogorov-Smirnov dengan langkah-langkah

1. Menentukan hipotesis
   H_0: populasi berdistribusi Weibull vs
   H_a: populasi tidak berdistribusi Weibull
2. Menghitung nilai statistik uji ${}_2D_{r,n}$ dimana
   $${}_2D_{r,n} = \sup_{0\le y\le Y_r} |F_n(y) - y|$$
   $$= \max_{1\le i\le r}\left\{\frac{i}{n} - Y_i, Y_i - \frac{i-1}{n}\right\}$$
   dengan $Y_i = F(t_i) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{\beta}\right\}$,
   $\theta = 9.19, \beta = 1.41715$ dan $n = 50$

Berdasarkan tabel di atas diperoleh ${}_2D_{r,n} = 0.12937$

3. Modifikasi ${}_2D_{r,n}$ menjadi D_r^*, dimana
   $$D_r^* = \sqrt{n}\ {}_2D_{r,n} + \frac{0.24}{\sqrt{n}}$$
   $$= \sqrt{50}\,(0.12937) + \frac{0.24}{\sqrt{59}} = 0.94872$$
4. Membandingkan D_r^* dengan nilai $\sqrt{n}D$ pada Tabel 2.1, misalkan $\alpha = 0.05$ dan $p = \frac{r}{n} = \frac{30}{50} = 0.6$,

maka $\sqrt{n}D = 1.3211$ dimana r adalah jumlah item yang teramati, yaitu $r = r_1 + r_2$.

5. H_0 diterima pada tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$, karena $D_r^* < \sqrt{n}D$ atau $0.94872 < 1.3211$, artinya populasi berdistribusi Weibull.

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (3.3), (3.4), (3.5) dan (3.6) akan ditentukan estimasi interval kepercayaan untuk u, b, θ dan β dari data waktu kegagalan cairan isolasi. Dengan menggunakan *software* R diperoleh matriks informasi dan inversnya sebagai berikut.

$$\boldsymbol{I_0} = \begin{bmatrix} 60.25021 & -14.11476 \\ -14.11476 & 82.67513 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{I_0^{-1}} = \begin{bmatrix} 0.01729 & 0.00295 \\ 0.00295 & 0.01260 \end{bmatrix}$$

diperoleh $(\boldsymbol{I_0^{-1}})_{11} = 0.01729$ dan $(\boldsymbol{I_0^{-1}})_{22} = 0.0126$. Misalkan diberikan tingkat signifikansi $\alpha = 5\%$ dan sebelumnya telah diperoleh nilai $\hat{u} = 2.21811$ dan $\hat{b} = 0.70564$, maka

$$P\left\{\hat{u} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_o^{-1})_{11}} \leq u \leq \hat{u} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_o^{-1})_{11}}\right\} = 1 - \alpha$$

$\Leftrightarrow P\{1.95996 \leq u \leq 2.47582\} = 95\%$.

Jadi, interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk u adalah $[1.95996, 2.47582]$ dan interval kepercayaan θ adalah [7.10216,11.89146]. selanjutnya, untuk b

$$P\left\{\hat{b} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_o^{-1})_{22}} \leq b \leq \hat{b} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_o^{-1})_{22}}\right\} = 1 - \alpha$$

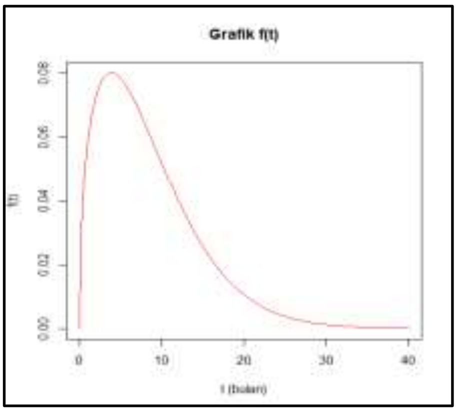
$\Leftrightarrow P\{0.48564 \leq b \leq 0.92564\} = 95\%$.

Jadi, interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk b adalah [0.48564,0.92564] dan interval kepercayaan β adalah [0.1.08033,3.2.05914].

3.4. Penerapan Hasil Estimasi Parameter

Pada sub Bab 3.3 sebelumnya dari data waktu hidup mencit telah diperoleh estimasi parameter untuk $\hat{\theta} = 9.19$ dan $\hat{\beta} = 1.41715$, maka akan ditunjukkan bagaimana penerapannya.

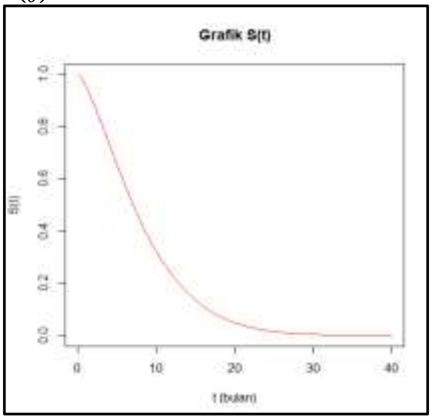
Fungsi kepadatan peluang (pdf) dari distribusi $WEI(\theta, \beta)$ berdasarkan Definisi 2.4, jika dijalankan menggunakan *software* R diperoleh grafik sebagai berikut.



Gambar 3.1 Fungsi Kepadatan Peluang Distribusi $WEI(9.19, 1.41715)$

Pada Gambar 3.1 dapat menyatakan peluang kematian mencit. Jika dilihat pada Gambar 3.1 maka peluang kematian mencit akan semakin besar pada saat disekitar $t = 3.9$ bulan yaitu sekitar 0.08015 atau 8.015%. Hal ini menunjukkan bahwa, mencit mengalami kematian paling banyak terjadi pada saat di sekitar $t = 3.9$ bulan.

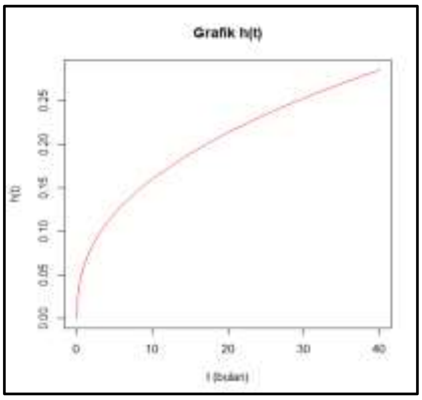
Fungsi *survival* $S(t)$, yaitu peluang suatu item untuk bertahan hidup. Fungsi *survival* untuk distribusi Weibull dinyatakan sebagai, $S(t) = \exp\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}$ memiliki grafik sebagai berikut.



Gambar 3.2 Grafik Fungsi *Survival* $WEI(9.19, 1.41715)$

Pada Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa $S(t)$ mengalami penurunan seiring bertambahnya nilai t, misalnya pada saat $t = 0$ terlihat $S(0) = 1$ atau peluang mencit bertahan hidup saat dinyatakan lahir adalah pasti, sedangkan pada saat $t = 30$ bulan $S(30) = 0.00476$. Hal ini menunjukkan bahwa, peluang mencit bertahan hidup selama 30 bulan adalah sekitar 0.476%. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa maksimal waktu tahan hidup mencit adalah hanya dalam waktu 30 bulan.

Fungsi *hazard* $h(t)$, yaitu laju kegagalan suatu item untuk bertahan hidup. Fungsi *hazard* untuk distribusi Weibull dinyatakan sebagai, $h(t) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}$ memiliki grafik sebagai berikut.



Gambar 3.3 Grafik Fungsi *Hazard* $WEI(9.19, 1.41715)$

Pada Gambar 3.4 dapat dilihat bahwa $h(t)$ mengalami kenaikan seiring bertambahnya nilai t, hal ini menunjukkan bahwa semakin lama mencit hidup, maka laju kematian mencit akan semakin besar.

4. Penutup

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitan yang diuraikan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Estimasi parameter dari distribusi Weibull berdasarkan sampel tersensor tipe II progresif dengan menggunakan metode maksimum likelihood diperoleh hasil dari parameter θ dan β yaitu $\hat{\theta} = 9.19$ dan $\hat{\beta} = 1.41715$.
2. Interval kepercayaan parameter populasi distribusi Weibull berdasarkan sampel tersensor tipe II progresif diperoleh dengan menggunakan sifat asimtotik MLE maka interval kepercayaan untuk parameter θ dan β pada tingkat signifikansi $\alpha = 5\%$ yaitu berada pada interval $7.10216 \leq \theta \leq 11.89146$ dan $1.08033 \leq \beta \leq 2.05914$.
3. Penerapan dari parameter estimasi *likelihood* maksimum distribusi Weibull pada data waktu hidup mencit yaitu diperoleh informasi bahwa mencit mengalami kematian rata-rata terjadi pada saat di sekitaran $t = 3.9$ bulan. Sedangkan maksimal waktu tahan hidup mencit adalah hanya dalam waktu 30 bulan. Untuk laju kegagalan mencit diperoleh kesimpulan bahwa semakin lama mencit hidup maka laju kematian (*hazard*) mencit akan semakin besar.

4.2 Saran

Pada penelitian ini penulis menunjukkan estimasi parameter distribusi Weibull berdasarkan sampel tersensor tipe II progresif dengan dua tahapan penyensoran menggunakan metode *likelihood* maksimum, maka untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan agar peneliti menunjukkan estimasi parameter dengan metode lain seperti metode kuadrat terkecil atau penaksir bayes dan penulis juga menyarankan agar peneliti menunjukkan estimasi parameter untuk distribusi lain seperti log-normal.

Ucapan Terimakasih. Penulis menyampaikan terimakasih kepada dosen pembimbing atas segala curahan perhatiannya sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik dan tepat waktu. Penulis juga menyampaikan terimakasih kepada seluruh pihak yang turut andil dalam penelitian ini baik langsung maupun tidak langsung.

Daftar Pustaka

[1] Balakrishnan, N. 2014. *The Art of Progressive Censoring* Canada: Erhard Cramer.

[2] Balakrishnan, N dan Aggarwala. 2000. *Progressive Censoring: Theory, Method and Aplication*. Boston: Birkhauser.

[3] Collect, David. 1997. *Modelling Survival Data in Medical Research Third Edition*. New York: Taylor dan Francis Group.

[4] Fitriana, R dan Astutik S. 2020. *Statistika Marematika dengan Pendekatan Terapan*. Malang: UB Press

[5] Harlan, J. 2017. *Analisis Survival*. Depok: Gunadarma.

[6] Kim, Chansoo, Jinhyouk Jung dan Younshik Chung. 2011. Bayesian Estimation for the Exponentiated Weibull Model Under Type II Progressive Censoring. *Statistical Papers*. Vol.**52**: 53-70.

[7] Kleinbaum, D. G. dan Klein, 2005. *Survival Analysis: A Self-Learning Text Second Edition.* New York: Springer Science.

[8] Lawless, J. F. 1982. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. Amerika Serikat: Wiley.

[9] Lucaks, Eugene. 1972. *Probability and Mathematical Statistics*. New York.: The Catolic University of Amerika.

[10] Nugraha, Jaka. 2017. *Metode Maksimum Likelihood dalam Model Pemilihan Diskrit*. Yogyakarta: Universitas Islam Indonesia.

[11] Nugroho, Sigit. 2008. Pengantar Statistika Matematika Edisi Pertama. Bengkulu: UNIB Press.

[12] Ramachandran, N.M dan Tsokos C.P. 2021. *Mathematical Statistics with Aplication in R Third Edition.* London: Katey Birtcher.

[13] Somayasa, I. W. 2008. *Diktat Kuliah Statistika Matematika I.* Kendari: Universitas Halu Oleo.

[14] Tucker, G. H. 1962. *An Introduction Probability and Mathematical Statistics.* New York: University of California.

[15] Walpole, R.E dan Myers R.H. 1995. *Ilmu peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan Edisi* ke-4. Bandung: ITB Bandung.