ANALISIS PEMODELAN MATEMATIKA *PREY-PREDATOR* DENGAN DILAKUKANNYA *TREATMENT* PADA POPULASI *PREY* YANG TERINFEKSI

Suswanti
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Indonesia
Email: suswantiputri01@gmail.com

Mukhsar[1,a], Muh. Kabil Djafar[2,b] dan La Pimpi[2,c]
[1]Program Studi Statistika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Indonesia
[2]Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Indonesia
Email: [a]muksarlagi@gmail.com, [b]kabildjafar@uho.ac.id dan [c]lapimpi.uho.mipa@gmail.com

ABSTRAK

Model *prey-predator* adalah salah satu model yang diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra pada tahun 1926. Model ini digunakan untuk menggambarkan interaksi antar dua populasi yang bersifat mangsa dan pemangsa. Namun, pada model *prey-predator* yang dasar selalu diasumsikan bahwa kedua populasi dalam keadaan sehat. Nyatanya, kondisi pada lingkungan menunjukkan bahwasannya terdapat mangsa dan pemangsa dengan kondisi sakit yang mempengaruhi perilaku bertahan dan berburu makanan. Pada penelitian ini, akan dimodelkan sistem yang menjukkan perilaku *prey-predator* dengan kondisi *prey* yang terinfeksi penyakit dan dipertimbangkan adanya pengobatan yang diberikan pada *prey* atau mangsa untuk mengurangi jumlah infeksi pada populasi *prey*.

Kata Kunci : Model *Prey-Predator*, Titik Kesetimbangan, Mangsa Terinfeksi, Model *Treatment*

ABSTRACT

The prey-pey-predator model wa introduction by Lotka and Volterra in 1926. This model is used to describe the interaction between two populations which are prey and predator. Homewer, in the basic prey-predator model it is always assumed that both populations are in good health. In fact, the conditions in the enviromentr suggest that there are prey and predators with diseased conditions that affect survival and hunting behavior. In this study, a system will be modeled that exhibits prey-predator behavior with disease-infected prey and considers the existence of treatment given to prey or prey to reduce the number of infections in the prey population.

Keywords : *Prey-Predator Model, Equilibrium Point, Infected Prey, Treatment Model*

1. Pendahuluan

Komunitas adalah kumpulan dari berbagai populasi dalam suatu wilayah tertentu yang saling berinteraksi dan mempengaruhi satu sama lain. Interaksi yang terbentuk antara masyarakat dan lingkungan disebut ekosistem. Dalam ekosistem terdapat rangkaian organisme yang saling berhubungan dalam kebiasaan makanannya yang disebut rantai makanan. Rantai makanan memiliki peran penting dalam menjaga keseimbangan ekosistem. Jika salah satu rantai makanan hilang maka dinamika ekosistem akan terganggu dan dapat berdampak pada populasi mangsa *prey* atau *predator* (Deden, 2017).

Salah satu bentuk interaksi pada makhluk hidup adalah saling mangsa memangsa antar satu spesies dengan spesies lainnya demi kelangsungan hidup mereka. Seperti halnya yang sering kita temui di lingkungan adalah perilaku harimau dan kancil. Harimau yang merupakan hewan karnivora membutuhkan daging untuk bertahan hidup.

Dalam matematika, model tersebut dinamakan model *prey-predator* yang diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra pada tahun 1926. Model ini mengasumsikan bahwa *predator* dan *prey* tumbuh secara eksponensial. Akan tetapi asumsi ini masih perlu disempurnakan sehingga pada tahun 1948 Leslie dan Gower melakukan modifikasi pada model Lotka-

Voltera yang dikenal dengan model Leslie Gower (Mokodimpit, 2013).

Pada sebuah populasi dimungkinkan beberapa pemangsa hidup secara bersamaan dan memburu mangsa yang sama. Hal ini mengakibatkan kompetisi perebutan wilayah dan makanan akan menjadi salah satu faktor yang memicu terjadinya persaingan yang dapat mempengaruhi jumlah kawanan dan tingkat kesehatan masing-masing kelompok (Mu'tamar, 2019).

Model *prey-predator* yang dibentuk oleh Lotka dan Voltera mengasumsikan kedua populasi dalam keadaan sehat, sehingga tidak ada halangan bagi para pemangsa dalam berburu dan mangsa untuk menghindari buruan. Namun pada kenyataannya, kondisi dengan lingkungan menunjukan bahwa adanya suatu populasi yang terinfeksi penyakit, dengan kondisi pemangsa yang sakit akan membuat kemampuan berburu menurun dan kemampuan menghindar bagi mangsa juga bekurang (Agustito, 2018).

Selanjutnya, penelitian ini berdasarkan sistematika berikut. Perumusan model diberikan setelah bab ini. Analisis kualitatif kestabilan lokal model disekitar titik ekuilibrium ditentukan dengan kriteria Routh-Hurwitz diberikan pada bagian tiga. Simulasi numerik diberikan pada bagian empat. Pada bagian lima diberikan kesimpulan dan saran dari penelitian ini.

2. Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi pustaka dan studi literature tentang model matematika mangsa pemangsa dari Lotka-Volterra. Secara garis besar, langkah-langkah penelitiannya adalah sebagai berikut:

Adapun prosedur yang dijalankan dalam mencapai tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1) Identifikasi Masalah

Mengidentifikasi masalah untuk menentukan fokus dan setelahnya bisa dilakukan kajian pustaka atau studi literatur dengan mempelajari secara mendalam jurnal-jurnal ilmiah dan buku yang terkait pada permasalahan tersebut.

2) Model Matematika

Mengkaji model mangsa pemangsa Lotka-Volterra. Hal ini dilakukan dengan mengamati model mangsa pemangsa Lotka-Volterra untuk selanjutnya dilakukan penambahan asumsi baru sesuai model yang akan di kontruksi.

3) Analisis Kestabilan

Menyelesaikan dan menginterpretasikan model, setelah model terbentuk maka perlu diselesaikan secara matematika yaitu mencari titik kesetimbangan, nilai eigen, Jacobian dan menentukan sifat kestabilan.

4) Simulasi Numerik

Melakukan simulasi numerik dari penyebaran penyakit pada model *prey-predator* yang terinfeksi penyakit dan dilakukannya *treatment* dengan menggunakan komputer untuk menunjukan hasilnya secara grafik.

5) Penarikan Kseimpulan

Terakhir, penarikan suatu kesimpulan dari hasil-hasil yang telah diperoleh berdasarkan hasil analisisnya.

3. Hasil dan Pembahasan

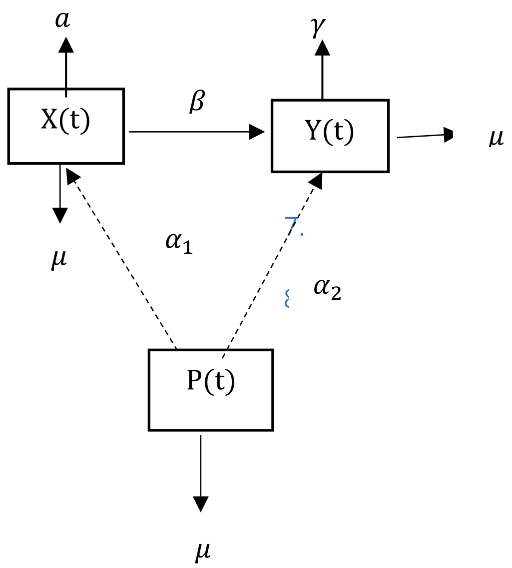
3.1 Model *Prey-Predator* dengan Pengobatan

Misalkan didefinisikan populasi mangsa pada suatu habitat pada waktu t terdiri atas $X(t)$ adalah mangsa sehat, $Y(t)$ adalah mangsa terinfeksi, Selanjutnya didefinisikan $P(t)$ sebagai populasi pemangsa pada habitat yang sama dengan populasi mangsa pada waktu t.

Adapun asumsi-asumsi yang digunakan dalam model ini adalah:

1. Hanya mangsa sehat yang dapat tumbuh, tanpa adanya pemangsa, laju pertumbuhan mangsa sehat sebesar α.
2. Infeksi antara mangsa terjadi akibat adanya interaksi, jumlahnya sebanding dengan hasil kali jumlah kedua populasi dengan konstanta β. Infeksi akan menyebabkan kematian pada populasi terinfeksi secara proposional sebesar μ
3. Mangsa yang di*treatment* tidak bisa dimangsa oleh pemangsa.
4. Mangsa adalah satu-satunya sumber makanan bagi pemangsa sebagai penunjang kehidupan sehingga tidak adanya pemangsa sebesar μ sedangkan laju predasi mangsa sehat mengakibatkan pertumbuhan sebanding dengan jumlah populasi keduanya sebesar α_1.
5. Pemangsa yang memakan mangsa terinfeksi akan mengalami kematian, sebanding dengan

jumlah kedua populasi dengan konstanta α_2, sehingga mengalami pengurangan.



Gambar 1. Skema relasi antar populasi mangsa dan pemangsa dalam model

Berdasarkan penjabaran dari asumsi-asumsi, skema serta definisi di atas diperoleh model matematika yang menggambarkan perilaku mangsa-pemangsa dengan infeksi pada mangsa:

$$\frac{dX}{dt} = \alpha X - \beta XY - a_1 XP$$

$$\frac{dY}{dt} = \beta XY - a_2 YP - \gamma Y - \mu Y \qquad (1)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\mu P + a_1 XP - a_2 YP$$

Tabel 1. Variabel dan Parameter Model Prey-Predator pada Prey yang Terinfeksi dengan Treatment

Simbol	Definisi	Satuan
$X(t)$	Populasi mangsa sehat pada waktu t	Ekor
$Y(t)$	Populasi mangsa yang terinfeksi pada waktu t	Ekor
$P(t)$	Populasi pemangsa pada waktu t	Ekor
a	Laju pertumbuhan intrinsic	Per satuan waktu
β	Laju penyebaran penyakit	Per satuan waktu
μ	Laju kematian populasi yang terinfeksi	Per satuan waktu
γ	Laju kesembuhan dari penyakit	Per satuan waktu
α_1	Laju predasi mangsa sehat	Per satuan waktu
α_2	Laju predasi mangsa sakit	Per satuan waktu

3.2 Analisis Titik Kesetimbangan

Analisis dari titik kesetimbangan pada sistem diferensial digunakan untuk menentukan suatu selesaian yang tidak berubah terhadap waktu t. Dalam analisis tersebut akan diamati 3 kondisi berdasarkan pada persamaan di atas yaitu: (i) tidak adanya populasi, (ii) tidak adanya infeksi pada mangsa, dan (iii) tidak ada populasi pemangsa. Untuk menentukan titik ekuilibrium masing-masing dibuat menjadi nol, sehingga secara matematis dapat dituliskan menjadi:

$$E_0(X_0, Y_0, P_0) = \{0, 0, 0\}$$

$$E_1(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{P}_1) = \left\{\frac{\mu}{\alpha_1}, 0, \frac{a}{\alpha_1}\right\} \qquad (2)$$

$$E_2 = \left\{\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{a}{\beta}, 0\right\}$$

- *Titik ekuilibrium bebas populasi E_0 adalah titik ekuilibrium yang tidak stabil.*

Adapun matriks Jacobian dari Persamaan (2) diberikan oleh:

$A = (\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \alpha_3) \qquad (3)$

dengan masing-masing komponen $\alpha_i, i = 1, 2, 3$, sebagai berikut:

$\alpha_1 = (-\beta Y - \alpha_1 P + a \quad \beta Y \quad P\alpha_1)^T$

$\alpha_2 = (-\beta X \quad \beta X - P\alpha_2 - \gamma - \mu \quad -P\alpha_2)^T$

$\alpha_3 = (-\alpha_1 X \quad -\alpha_2 Y \quad \alpha_1 X - \alpha_2 Y - \mu)^T$

Jika disubtitusikan nilai E_0 di Persamaan (3) maka akan diperoleh matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium E_0 yaitu:

$$J_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

dengan persamaan karakteristik dari J_0 adalah

$$(a - \lambda)(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu) = 0$$

solusi dari Persamaan karakteristiknya adalah:

$$\lambda_1 = \{a, -\gamma - \mu, -\mu\}$$

Oleh karena terdapat $a > 0$ maka sistem Persamaan (4.1) tidak stabil di sekitar titik ekuilibrium bebas populasi E_0.

- *Titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 adalah titik ekuilibrium yang stabil jika $R_0 < 1$.*

Jika disubtitusikan nilai E_1 pada persamaan (3) dan pada persamaan (3) kemudian ditentukan persamaan karakteristiknya, akan diperoleh:

$$\lambda^3 - \frac{(\beta\mu - \alpha_2 a - \gamma\alpha_1 - \mu\alpha_1)\lambda^2}{\alpha_1} + \frac{\alpha\mu\lambda}{\alpha_1} - \frac{\alpha\mu(\beta\mu - \alpha_2 a - \gamma\alpha_1 - \mu\alpha_1)}{\alpha_1} = 0$$

Solusi dari persamaan karakteristik diperoleh:

$$\lambda_1 = \left(-\frac{\alpha_2 a - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\alpha_1}, \sqrt{-a\mu}, -\sqrt{-a\mu}\right)$$

Kestabilan dari E_1 hanya bergantung kepada $\lambda_{1,1}$ karena nilai ini yang belum bisa dipastikan positif atau negatif. Selanjutnya, jika diinginkan sistem stabil maka dari $\lambda_{1,1}$ haruslah memenuhi kondisi:

$$\frac{a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\alpha_1} > 0$$

Berdasarkan nilai R_0 yang telah didefinisikan pada Persamaan (4.13) dapat dituliskan kembali dalam bentuk.

$$\frac{a\alpha_2 - R_0 a\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{a\alpha_2}{\alpha_1}(1 - R_0) > 0 \qquad (4)$$

Jelas Persamaan (4) akan terpenuhi oleh $R_0 < 1$. Jika kondisi pada persamaan (4) telah terpenuhi maka $R_e(\lambda_i) \leq 0, i = 1, 2, 3$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium E_1 stabil dengan $R_0 < 1$. Sistem ini tidak mungkin stabil asimtotik pada titik tersebut, dikarenakan terdapat nilai eigen kompleks yaitu pada titik $\lambda_{1,3} = \pm i\sqrt{a\mu}$.

- *Titik ekuilibrium bebas pemangsa E_2 stabil untuk sembarang nilai R_0*

Jika disubtitusikan nilai E_2 pada persamaan (3) akan diperoleh nilai eigen

$$\lambda_3 = \left(\sqrt{-a(\gamma + \mu)}, -\sqrt{-a(\gamma + \mu)}, \frac{-a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\beta}\right)$$

Berdasarkan titik kesetimbangan di atas, sudah jelas kestabilan sistem di sekitar E_2 hanya dipengaruhi oleh nilai eigen ketiga $\lambda_{2,3} = \frac{-a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\beta}$, yang dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\lambda_{2,3} = \frac{-a\alpha_2}{\beta}(1 + R_0),$$

yang nilainya akan selalu negatif untuk berapapun nilai pada R_0.

3.3 Simulasi Model

Salah satu tujuan dari penelitian ini adalah melakukan simulasi model. Simulasi dilakukan karena pengamatan terhadap sistem sulit dilakukan secara langsung, Selain itu dengan simulasi dapat dipelajari hal-hal yang bisa terjadi dalam dinamika populasi. Diberikan dua nilai parameter untuk digunakan dalam simulasi di mana salah satu bagian nilai parameter menghasilkan nilai $R_0 < 1$, sedangkan nilai perameter lainnya akan menghasilkan nilai $R_0 > 1$.

Visualisasi model (1) menggunakan titik kesetimbangan bebas penyakit (E_1) dan nilai-nilai parameter yang diberikan akan berbeda pada kasus $R_0 < 1$ dan kasus $R_0 > 1$.

Tabel 2. Nilai-Nilai Parameter untuk Kasus $R_0 < 1$

Parameter	Deskripsi	Nilai
$\boldsymbol{a}$	Laju pertumbuhan intrinsik	5
$\boldsymbol{\alpha_1}$	Laju predasi mangsa sehat	4
$\boldsymbol{\alpha_1}$	Laju predasi mangsa sakit	4
$\boldsymbol{\beta}$	Laju penyebaran penyakit	2
$\boldsymbol{\gamma}$	Laju kesembuhan dari penyakit	3
$\boldsymbol{\mu}$	Laju kematian populasi yang terinfeksi	2

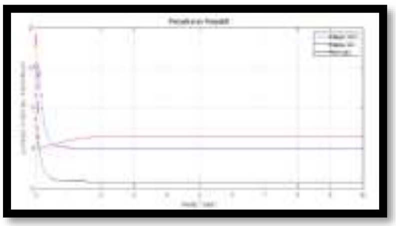
Gambar 2. Laju perubahan titik kesetimbangan bebas penyakit kasus $R_0 < 1$

Dari Gambar 42 menunjukkan jumlah individu yang rentan mengalami penurunan kemudian bergerak naik tetapi tidak menuju titik kesetimbangan. Pada kelas individu terinfeksi terjadi peningkatan yang setelahnya menurun karena pengobatan kemudian sembuh, dan akan berkurang karna kematian alami dan kematian akan penyakit. Sedangkan pada populasi pemangsa mengalami peningkatan karena adanya mangsa yang terinfeksi tidak dapat menghindari buruan.

Tabel 4.5 Nilai-Nilai Parameter Bebas Penyakit Kasus $R_0 > 1$

Parameter	Deskripsi	Nilai
$\boldsymbol{a}$	Laju pertumbuhan intrinsik	3
$\boldsymbol{\alpha_1}$	Laju predasi mangsa sehat	2

$\boldsymbol{\alpha_1}$	Laju predasi mangsa sakit	2
$\boldsymbol{\beta}$	Laju penyebaran penyakit	5
$\boldsymbol{\gamma}$	Laju kesembuhan dari penyakit	3
$\boldsymbol{\mu}$	Laju kematian populasi yang terinfeksi	3



Gambar 5. Laju perubahan titik kesetimbangan endemik $R_0 > 1$

dari Gambar 5 diketahui bahwa individu rentan mengalami penurunan kemudian bergerak naik tetapi tidak menuju titik kesetimbangan. Pada individu menurun menuju titik kesetimbangan. Sedangkan kelas pemangsa mengalami penurunan yang drastis karena populasi mangsa berkurang disebabkan adanya populasi yang terinfeksi penyakit dan masuk daerah pengobatan, tetapi tidak sampai menuju titik kesetimbangan.

4. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Model matematika *prey-predator* dengan treatment pada populasi *prey* yang terinfeksi, diperoleh :
$$\frac{dX}{dt} = aX - \beta XY - \alpha_1 XP$$
$$\frac{dY}{dt} = \beta X\,Y - \alpha_2 YP - \gamma Y - \mu Y$$
$$\frac{dP}{dt} = -\mu P + \alpha_1 XP - \alpha_2 YP$$
2. Analisis matematika model *prey-predator* dengan adanya *treatment* mengkaji perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = \left(\frac{\mu}{\alpha_1}, 0, \frac{a}{\alpha_1}\right)$ dan bebas pemangsa $E_2 = \left(\frac{\gamma+\mu}{\beta}, \frac{a}{\beta}, 0\right)$. Sifat kestabilan bebas penyakit kasus $R_0 < 1$ bersifat stabil dan untuk kasus $R_0 > 1$ bersifat *center* dan kedua titik kesetimbangan endemic yang stabil asimtotik. sehingga pada model prey-predator dengan treatment pada prey ini dapat menular atau tidak menjadi wabah jika nilai $R_0 < 1$, sedangkan dapat menjadi status endemic bagi populasi prey jika nilai $R_0 > 1$.

5. Saran

Pada tugas akhir ini, penulis melakukan penelitian tentang analisis pemodelan matematika prey-predator dengan treatment pada populasi *prey* yang terinfeksi. Oleh karena itu penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya pada populasi *prey* yang terinfeksi tidak hanya diberikan pengobatan, tetapi disarankan juga untuk melakukan vaksinasi. Sehingga *prey* yang telah di obati dan dinyatakan sembuh dapat dikembalikan pada lingkungannya agar populasi pemangsa tidak mengalami penurunan karena kurangnya mangsa.

Ucapan Terima Kasih

Peneltian ini dapat dilaksanakan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh sebab itu penulis mengucapkan terima kasih kepada Pembimbing 1, Pembimbing 2, serta penguji yang telah memberikan ide, kritikan dan masukan sehingga penelitian ini dapat terselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

D. Agustito, & I. Taufiq. *Model Predator-Prey dengan Dua Predator dan Satu Terinfeksi.* Indonesian Journal of Mathematics Education, Vol. 1, No. 1. 2018. 8-15.

A. D. Deden. *One-Prey Two-Prey Model with Prey Harvesting in a Food Chain Interaction.* International Symposium on Current Progress in Mathematics amd Sciences (ISCPMS 2016). 2017. 1-8.

Nurwan, & E. Rahmi. *Bifurkasi Periode Ganda dan Neimark-Sacker pada Model Diskret Leslie-Gower dengan Fungsi Respon Ratio-Dependent.* Journal of Mathematics and Its Applications, Vol. 17, No. 1. 2020. 19-33.

K. Mu'tamar, D. Rahmalia, & Sutimin. *Vaksinasi dan Treatment pada Predator-Prey dengan Dua Jenis Pemangsa yang Salah Satunya*

Terinfeksi. EKSAKTA , Vol. 19, No. 2. 2019. 128-142.

Z. Ndii. *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit Teori.* Yogyakarta: Grup Penerbitan CV Budi Utama. 2018.