

MODEL SEIAR PENYEBARAN PENYAKIT RABIES PADA MANUSIA

Dian Hasanah¹⁾

¹⁾Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: dianhasanah08@gmail.com

Asrul Sani^{1,a)}, Muh. Kabil Djafar^{1,b)}, Edi Cahyono^{1,c)} dan La Pimpi^{1,d)}

¹⁾Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: ^{a)}saniasrul.math@gmail.com, ^{b)}kabildjafar@gmail.com, ^{c)}edi.cahyono@innov-center.org,
^{d)}lapimpi.uho.mipa@gmail.com

ABSTRAK

Rabies adalah infeksi virus akut yang menyerang sistem saraf pusat dan umumnya diderita oleh hewan berdarah panas dan manusia serta dapat menular. Virus rabies ditularkan kepada manusia melalui gigitan hewan penular rabies seperti anjing, kucing, dan kerbau. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan model SEIAR penyebaran penyakit rabies pada manusia dan perilaku selesaiannya. Pembentukan model diawali dengan membuat diagram alir penyebaran penyakit rabies pada manusia dengan model SEIAR. Hasilnya diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit menggunakan linearisasi disekitar titik kesetimbangan. Hasilnya, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik jika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, artinya penyakit akan menghilang setelah jangka waktu tertentu. Simulasi numerik model untuk penyakit rabies yang dilakukan sejalan dengan analisis perilaku model.

Kata Kunci: Rabies, Model SEIAR, Kestabilan Titik Kesetimbangan, Bilangan Reproduksi Dasar

ABSTRACT

Rabies is an acute viral infection that attacks the central nervous system and generally affects warm-blood animals and human and can be contagious. Rabies virus is transmitted to humans through the bite of rabid animals such as dogs, cats, and monkeys. The purpose of this research is to determine SEIAR model of the spread rabies disease at the human and its expiry behavior. Construction of the model starts by making flow chart of the spread of rabies at the human using SEIAR model. The results are obtained two equilibrium points, namely disease-free equilibrium points and endemic equilibrium points. Analysis of the stability of the disease-free equilibrium point is using linearization around the equilibrium point. As a result, the asymptotic stable disease-free equilibrium point if the base reproduction number is less than one and it means that the disease will disappear after a certain period of time. Numerical simulation models for rabies disease are carried out in line with the analysis of model behavior.

Keywords: Rabies, SEIAR Model, Stability of Equilibrium Points, Basic Reproduction Number

1. Pendahuluan

Rabies adalah infeksi virus akut yang menyerang sistem saraf pusat dan umumnya diderita oleh hewan berdarah panas dan manusia serta dapat menular. Virus rabies ditularkan kepada manusia melalui gigitan hewan penular rabies seperti anjing, kucing, dan kerbau. Rabies telah menyebar ke hampir semua benua kecuali Antartika, dan lebih dari 150 negara telah terinfeksi penyakit tersebut. Setiap tahun, lebih dari 55.000 orang meninggal karena rabies, dan lebih dari 15 juta orang di seluruh dunia menerima

pengobatan vaksin rabies preventif untuk mencegah perkembangan penyakit ini. Hingga 40% orang yang digigit rabies adalah anak-anak di bawah 15 tahun [1].

Solusi untuk mencegah dan memberantas rabies pada manusia telah banyak dikembangkan dan dipelajari dari perspektif kesehatan. Salah satu disiplin ilmu yang dapat membantu mengatasi permasalahan tersebut adalah matematika. Pemodelan matematika dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penyebaran rabies pada manusia dengan

menggunakan asumsi-asumsi tertentu yang dapat diselesaikan baik secara analitik maupun numerik.

Model matematika penyebaran penyakit rabies telah banyak diteliti sebelumnya pada jurnal dan studi. Rumlawang dan Nanlohy [2] menganalisa kestabilan model penyebaran penyakit rabies dengan menggunakan model SI. Fitri [3] membuat model matematika (linier) populasi anjing rabies dengan vaksinasi dengan menggunakan model SR. Chen, dkk [4] memodelkan penyebaran geografis rabies di Cina dengan menggunakan model SEIV. Zainurriyah [5] menganalisis model matematika penyebaran penyakit rabies pada anjing dengan vaksinasi dengan menggunakan model SEIR.

Model matematika yang juga dapat digunakan dalam penyebaran penyakit rabies pada manusia adalah model SEIAR. Model SEIAR menggambarkan bahwa individu yang rentan terserang penyakit menjadi individu yang terpapar ke dalam masa inkubasi, kemudian individu terinfeksi penyakit, dan terdapat periode infeksi asimtomatik dimana individu yang terinfeksi tidak menunjukkan gejala, dan individu sembuh serta kebal terhadap penyakit.

Pada bagian kedua akan dibahas mengenai metode yang diterapkan dalam menyelesaikan penelitian. Pada bagian ketiga akan dibahas mengenai hasil penelitian yang dilakukan berdasarkan prosedur yang ada pada bagian dua. Pada bagian keempat membahas tentang kesimpulan yang berisi tentang uraian singkat tentang hasil penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

2. Metode

Prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini adalah membuat beberapa asumsi, kemudian membuat model SEIAR penyebaran penyakit rabies pada manusia. Dari model yang telah dibuat dicari titik kesetimbangannya, kemudian dianalisis kestabilan titik kesetimbangannya. Dicari R_0 dengan menggunakan metode *The Next Generation Matrix* [6]. Serta dilakukan analisis R_0 terhadap parameter-parameter yang memengaruhi.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Matematika

Asumsi pembentukan model matematika dari penyebaran penyakit rabies pada manusia dapat disusun sebagai berikut:

1. Setiap individu yang baru lahir dianggap tidak memiliki kekebalan.
2. Terdapat masa inkubasi (periode laten) pada proses penularan penyakit rabies.

3. Individu yang berada dalam periode laten tidak dapat menularkan penyakit.
4. Manusia dan anjing yang rentan dapat terinfeksi jika berinteraksi dengan anjing terinfeksi.
5. Manusia rentan dapat terinfeksi oleh anjing terinfeksi tetapi tidak dapat terinfeksi oleh manusia lain yang telah terinfeksi.
6. Terdapat individu terinfeksi namun tidak menunjukkan gejala dan dapat menularkan penyakit.
7. Manusia dan anjing yang terpapar dapat disembuhkan apabila segera ditangani dengan vaksinasi.
8. Manusia dan anjing yang telah terinfeksi akan selalu fatal.

Berdasarkan asumsi untuk model SEIAR penyebaran penyakit rabies pada manusia diperoleh model sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS_d}{dt} &= A - \lambda_d R_d - \beta_{da} S_d (I_d + A_d) - \mu_d S_d \\ \frac{dE_d}{dt} &= \beta_{da} S_d (I_d + A_d) - (\delta_d + \gamma_d + k_d + \mu_d) E_d \\ \frac{dI_d}{dt} &= \delta_d E_d - \mu_d I_d \\ \frac{dA_d}{dt} &= \gamma_d E_d - \mu_d A_d \\ \frac{dR_d}{dt} &= k_d E_d - (\mu_d + \lambda_d) R_d \\ \frac{dS_h}{dt} &= B - \lambda_h R_h - \beta_{dh} S_h (I_d + A_d) - \mu_h S_h \\ \frac{dE_h}{dt} &= \beta_{dh} S_h (I_d + A_d) - (\delta_h + \gamma_h + k_h + \mu_h) E_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \delta_h E_h - \mu_h I_h \\ \frac{dA_h}{dt} &= \gamma_h E_h - \mu_h A_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= k_h E_h - (\mu_h + \lambda_h) R_h \end{aligned} \quad (1)$$

dengan:

$S_d(t)$: Jumlah anjing yang rentan pada waktu ke- t

$E_d(t)$: Jumlah anjing yang terpapar pada waktu ke- t

$I_d(t)$: Jumlah anjing yang terinfeksi pada waktu ke- t

$A_d(t)$: Jumlah anjing tanpa gejala pada waktu ke- t

$R_d(t)$: Jumlah anjing yang sembuh pada waktu ke- t

$S_h(t)$: Jumlah manusia yang rentan pada waktu ke- t

$E_h(t)$: Jumlah manusia yang terpapar pada waktu ke- t

$I_h(t)$: Jumlah manusia yang terinfeksi pada waktu ke- t

$A_h(t)$: Jumlah manusia tanpa gejala pada waktu ke- t

$R_h(t)$: Jumlah manusia yang sembuh pada waktu ke- t

A : Laju kelahiran pada anjing

λ_d : Laju kehilangan kekebalan vaksinasi pada anjing

μ_d : Laju kematian pada anjing

β_{da} : Laju penularan penyakit dari anjing ke anjing

δ_d : Laju transfer dari individu laten menjadi individu terinfeksi pada anjing

γ_d : Laju transfer dari individu laten menjadi individu terinfeksi tanpa gejala pada anjing

k_d : Laju kesembuhan pada anjing

B : Laju kelahiran pada manusia

λ_h : Laju kehilangan kekebalan vaksinasi pada anjing

μ_h : Laju kematian pada manusia

β_{dh} : Laju penularan penyakit dari anjing ke manusia

δ_h : Laju transfer dari individu laten menjadi individu terinfeksi pada manusia

γ_h : Laju transfer dari individu laten menjadi individu terinfeksi tanpa gejala pada manusia

k_h : Laju kesembuhan pada manusia

3.2 Analisis

Model SEIAR penyebaran penyakit rabies pada manusia berupa sistem persamaan diferensial nonlinear. Sistem (1) memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan diperoleh dengan menetapkan persamaan-persamaan pada sistem menjadi konstan terhadap waktu [7].

Titik kesetimbangan bebas penyakit dapat diperoleh dengan menyatakan ruas kiri dari Sistem (1) bernilai nol, kemudian disubstitusikan $E_d = I_d = A_d = E_h = I_h = A_h = 0$, sehingga akan diperoleh titik $E_1 = (S_d, E_d, I_d, A_d, R_d, S_h, E_h, I_h, A_h, R_h)$, telah diketahui pada titik kesetimbangan bebas penyakit bahwa $E_d = I_d = A_d = E_h = I_h = A_h = 0$, maka selanjutnya akan dicari nilai dari S_d, R_d, S_h, R_h .

$$A - \lambda_d R_d - \beta_{da} S_d (I_d + A_d) - \mu_d S_d = 0 \quad (2)$$

$$k_d E_d - (\mu_d + \lambda_d) R_d = 0 \quad (3)$$

$$B - \lambda_h R_h - \beta_{dh} S_h (I_d + A_d) - \mu_h S_h = 0 \quad (4)$$

$$k_h E_h - (\mu_h + \lambda_h) R_h = 0 \quad (5)$$

Dengan menyelesaikan (2), (3), (4), dan (5), sehingga didapatkan:

$$S_d = \frac{A}{\mu_d} \quad (6)$$

$$R_d = 0 \quad (7)$$

$$S_h = \frac{B}{\mu_h} \quad (8)$$

$$R_h = 0 \quad (9)$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_1 = \left(\frac{A}{\mu_d}, 0, 0, 0, 0, \frac{B}{\mu_h}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

Titik kesetimbangan endemik adalah titik kesetimbangan saat kelas terinfeksi tidak nol atau saat penyakit menyebar dalam populasi. Endemik penyakit artinya di dalam populasi selalu terdapat individu yang terserang penyakit, sehingga $E_d > 0, I_d > 0, A_d > 0, E_h > 0, I_h > 0$ dan $A_h > 0$. Untuk mencari titik kesetimbangan endemik dapat diperoleh dengan menyatakan ruas kiri dari Sistem (4.1) bernilai nol, sehingga akan diperoleh titik $E_2 = (S_d, E_d, I_d, A_d, R_d, S_h, E_h, I_h, A_h, R_h)$.

$$\beta_{da} S_d (I_d + A_d) - (\delta_d + \gamma_d + k_d + \mu_d) E_d = 0 \quad (10)$$

$$\delta_d E_d - \mu_d I_d = 0 \quad (11)$$

$$\gamma_d E_d - \mu_d A_d = 0 \quad (12)$$

$$\beta_{dh} S_h (I_d + A_d) - (\delta_h + \gamma_h + k_h + \mu_h) E_h = 0 \quad (13)$$

$$\delta_h E_h - \mu_h I_h = 0 \quad (14)$$

$$\gamma_h E_h - \mu_h A_h = 0 \quad (15)$$

Dengan menyelesaikan (2) – (5) dan (10) – (15), sehingga didapatkan:

$$E_2 = \left(\frac{\mu_d (\delta_d + \gamma_d + k_d + \mu_d)}{\beta_{da} (\delta_d + \gamma_d)}, \frac{\mu_d (I_d + A_d)}{(\delta_d + \gamma_d)}, \frac{\delta_d E_d}{\mu_d}, \frac{\gamma_d E_d}{\mu_d}, \frac{k_d E_d}{(\mu_d + \lambda_d)}, \frac{E_h \mu_d (\delta_h + \gamma_h + k_h + \mu_h)}{\beta_{dh} E_d (\delta_d + \gamma_d)}, \frac{\beta_{dh} S_h E_d (\delta_d + \gamma_d)}{\mu_d (\delta_h + \gamma_h + k_h + \mu_h)}, \frac{\delta_h E_h}{\mu_h}, \frac{\gamma_h E_h}{\mu_h}, \frac{k_h E_h}{(\mu_h + \lambda_h)} \right)$$

Kompartemen terinfeksi adalah $E_d, I_d, A_d, E_h, I_h, A_h$. Matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} untuk Sistem (1) adalah sebagai berikut:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta_{da} S_d (I_d + A_d) \\ 0 \\ 0 \\ \beta_{dh} S_h (I_d + A_d) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\delta_d + \gamma_d + k_d + \mu_d)E_d \\ -\delta_d E_d + \mu_d I_d \\ -\gamma_d E_d + \mu_d A_d \\ (\delta_h + \gamma_h + k_h + \mu_h)E_h \\ -\delta_h E_h + \mu_h I_h \\ -\gamma_h E_h + \mu_h A_h \end{bmatrix}$$

Matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} masing-masing diturunkan terhadap $E_d, I_d, A_d, E_h, I_h, A_h$. Sehingga diperoleh matriks F dan V sebagai berikut:

$$F = D\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{ad}S_d & \beta_{ad}S_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{ah}S_h & \beta_{ah}S_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = D\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \emptyset & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_d & \mu_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_d & 0 & \mu_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_h & \mu_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_h & 0 & \mu_h \end{bmatrix}$$

Substitusi nilai titik kesetimbangan bebas penyakit E_1 pada F diperoleh:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_{ad}A}{\mu_d} & \frac{\beta_{ad}A}{\mu_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_{ah}B}{\mu_h} & \frac{\beta_{ah}B}{\mu_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

selanjutnya akan dicari V^{-1} dan diperoleh:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\emptyset} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta_d}{\mu_d \emptyset} & \frac{1}{\mu_d} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma_d}{\mu_d \emptyset} & 0 & \frac{1}{\mu_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_d}{\mu_h \varphi} & \frac{1}{\mu_h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_d}{\mu_h \varphi} & 0 & \frac{1}{\mu_h} \end{bmatrix}$$

Dengan:

$$\emptyset = \delta_d + \gamma_d + k_d + \mu_d$$

$$\varphi = \delta_h + \gamma_h + k_h + \mu_h$$

Selanjutnya didapatkan matriks K . Dimana $K = FV^{-1}$, sehingga diperoleh

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{ad}A\delta_d + \beta_{ad}A\gamma_d}{\mu_d^2(\delta_d + \gamma_d + k_d + \mu_d)} & \frac{\beta_{ad}A}{\mu_d^2} & \frac{\beta_{ad}A}{\mu_d^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_{ah}B\delta_d + \beta_{ah}B\gamma_d}{\mu_d\mu_h(\delta_d + \gamma_d + k_d + \mu_d)} & \frac{\beta_{ah}B}{\mu_h\mu_d} & \frac{\beta_{ah}B}{\mu_h\mu_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mencari nilai eigen dari matriks K [8], diperoleh bilangan reproduksi dasarnya adalah:

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta_{ad}A(\delta_d + \gamma_d)}{\mu_d^2(\delta_d + \gamma_d + k_d + \mu_d)}$$

Selanjutnya akan dicari kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dari Sistem (1) dengan mensubstitusi titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = (\frac{A}{\mu_d}, 0, 0, 0, \frac{B}{\mu_h}, 0, 0, 0, 0)$ ke matriks jacobian J sehingga diperoleh:

$$= \begin{bmatrix} -\mu_d & 0 & -\phi A & -\phi A & -\lambda_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & \phi A & \phi A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_d & -\mu_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_d & 0 & -\mu_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_d & 0 & 0 & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi B & -\pi B & 0 & -\mu_h & 0 & 0 & 0 & -\lambda_h \\ 0 & 0 & \pi B & \pi B & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_h & -\mu_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_h & 0 & -\mu_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_h & 0 & 0 & \nabla \end{bmatrix}$$

Dengan:

$$\phi = \frac{\beta_{ad}}{\mu_d}$$

$$\pi = \frac{\beta_{ah}}{\mu_h}$$

$$\theta = -\delta_d - \gamma_d - k_d - \mu_d$$

$$\omega = -\delta_h - \gamma_h - k_h - \mu_h$$

$$\Delta = -\mu_d - \lambda_d$$

$$\nabla = -\mu_h - \lambda_h$$

Dengan bantuan Software Maple 13, diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = \mu_d - \lambda_h$$

$$\lambda_2 = \mu_d - \lambda_d$$

$$\lambda_3 = -\delta_h - \gamma_h - k_h - \mu_h$$

$$\lambda_4 = P + \sqrt{Q}$$

$$\lambda_5 = P - \sqrt{Q}$$

$$\lambda_6 = -\mu_d$$

$$\lambda_7 = -\mu_d$$

$$\lambda_8 = -\mu_h$$

$$\lambda_9 = -\mu_h$$

$$\lambda_{10} = -\mu_h$$

dengan:

$$P = \frac{1}{2\mu_a^2} 2\mu_a^2 + \mu_a k_a + \mu_a \delta_a + \mu_a \gamma_a$$

$$Q = \mu_a^2 k_a^2 + 2\mu_a^2 k_a \delta_a + 2\mu_a^2 k_a \gamma_a + \mu_a^2 \delta_a^2 + 2\mu_a^2 \delta_a \gamma_a + \mu_a^2 \gamma_a^2 + 4\delta_a \mu_a A \beta_{da} + 4\gamma_a \mu_a A \beta_{da}$$

Karena nilai-nilai parameter bernilai positif, maka nilai eigen yang pada titik kesetimbangan bebas penyakit $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_6 < 0, \lambda_7 < 0, \lambda_8 < 0, \lambda_9 < 0$ dan $\lambda_{10} < 0$. Untuk λ_4 dan λ_5 memiliki kemungkinan-kemungkinan yang muncul, yaitu:

1. Jika $Q = 0, \lambda_4 < 0$ & $\lambda_5 < 0$
2. Jika $Q > 0$ dan $0 < P < \sqrt{C}$, menghasilkan $\lambda_4 < 0$ & $\lambda_5 > 0$. Dan Jika $Q > 0$ dan $0 < \sqrt{C} < A$, menghasilkan nilai eigen $\lambda_4 < 0$ & $\lambda_5 < 0$.
3. Jika $Q < 0, Re(\lambda_4) < 0$ & $Re(\lambda_5) < 0$.

3.3 Simulasi Numerik dan Interpretasi

Kemudian dilakukan simulasi numerik menggunakan Software Maple 13 dengan nilai awal diasumsikan sebagai berikut:

$$I_d = 4$$

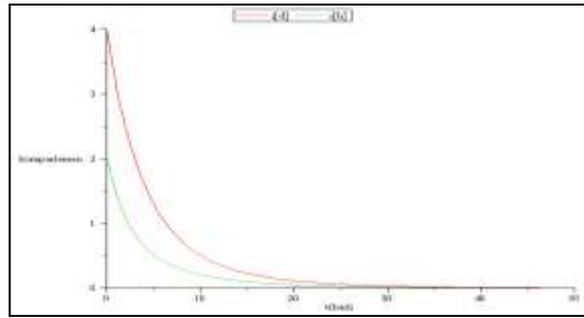
$$I_h = 2$$

Dengan waktu akhir adalah 50 hari dengan nilai parameter terdapat pada Tabel 1.

Tabel 1. Daftar nilai parameter

Parameter	Nilai		
	$R_0 < 1$	$R_0 > 1$	$R_0 = 1$
A	2.739	2.739	10
λ_a	0.002	0.002	0.002
μ_a	0.273	0.273	1
β_{da}	0.1	1	1
δ_a	0.017	0.017	0.1
γ_a	0.017	0.017	0.1
k_a	0.333	0.333	0.8
B	27.392	27.397	27.397
λ_h	0.002	0.002	0.002
μ_h	0.365	0.365	0.365
β_{dh}	0.01	0.01	0.01
δ_h	0.017	0.017	0.017
γ_h	0.017	0.017	0.017
k_h	0.333	0.333	0.333

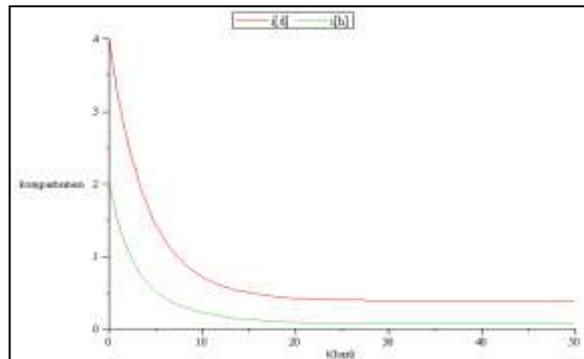
Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 1 diperoleh bilangan reproduksi dasar dari Sistem (1) adalah $R_0 = 0.3800275745$. Hasil simulasinya adalah sebagai berikut:



Gambar 1. Grafik Kompartemen Individu Anjing dan Manusia Terinfeksi Menuju Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit Saat ($R_0 < 1$)

Pada **Gambar 1** menunjukkan bahwa individu pada kompartemen anjing terinfeksi dan individu pada kompartemen manusia mengalami penurunan secara drastis menuju titik 0 dan stabil di titik tersebut. Untuk kondisi $R_0 < 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik, ini berarti untuk jangka waktu yang lama populasi anjing maupun manusia yang terinfeksi akan semakin mengecil atau sistem akan lebih cepat terbebas dari penyakit.

Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik titik kesetimbangan endemik untuk $R_0 > 1$. Jika nilai parameter β_{da} diperbesar menjadi 1, sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar dari Sistem (1) adalah $R_0 = 3.0800275745$. Hasil simulasinya adalah sebagai berikut:



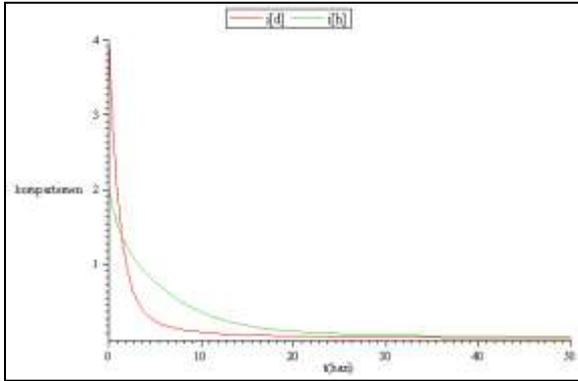
Gambar 2. Grafik Kompartemen Individu Anjing dan Manusia Terinfeksi Menuju Titik Kesetimbangan Endemik Saat ($R_0 > 1$)

Pada **Gambar 2** menunjukkan bahwa individu pada kompartemen anjing terinfeksi mengalami penurunan secara drastis menuju titik 0.383 dan stabil di titik tersebut, individu pada kompartemen manusia terinfeksi mengalami penurunan secara drastis menuju titik 0.535 dan stabil di titik tersebut. Untuk kondisi $R_0 > 1$ titik kesetimbangan endemik bersifat spiral stabil, ini menunjukkan bahwa sistem belum terbebas dari

<http://jmks.uho.ac.id/index.php>

penyakit dan masih terdapat penyakit yang mendominasi populasi tersebut.

Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik titik kesetimbangan endemik untuk $R_0 = 1$. Jika nilai-nilai parameter diperbesar menjadi $\beta_{ad} = 1$, $\mu_a = 1$, $A = 10$, $\delta_a = \gamma_a = 0.1$, $k_a = 0.8$, sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar dari sistem (4.1) adalah $R_0 = 1$. Hasil simulasinya adalah sebagai berikut:



Gambar 3. Grafik Kompartemen Individu Anjing dan Manusia Terinfeksi Menuju Titik Kesetimbangan Endemik Saat ($R_0 = 1$)

Pada **Gambar 3** menunjukkan bahwa individu pada kompartemen anjing terinfeksi mengalami penurunan secara drastis menuju titik 0.03 dan stabil di titik tersebut, individu pada kompartemen manusia terinfeksi mengalami penurunan secara drastis menuju titik 0.03 dan stabil di titik tersebut. Untuk kondisi $R_0 = 1$ titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik, ini menunjukkan bahwa sistem belum terbebas dari penyakit dan masih terdapat penyakit yang mendominasi populasi tersebut.

4. Kesimpulan dan Saran

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan di atas, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Diperoleh model SEIAR penyebaran penyakit rabies pada manusia

$$\frac{dS_d(t)}{dt} = A - \lambda_d R_d - \beta_{ad} S_d (I_d + A_d) - \mu_d S_d$$

$$\frac{dE_d(t)}{dt} = \beta_{ad} S_d (I_d + A_d) - (\delta_d + \gamma_d + k_d + \mu_d) E_d$$

$$\frac{dI_d(t)}{dt} = \delta_d E_d - \mu_d I_d$$

$$\frac{dA_d(t)}{dt} = \gamma_d E_d - \mu_d A_d$$

$$\frac{dR_d(t)}{dt} = k_d E_d - (\mu_d + \lambda_d) R_d$$

$$\frac{dS_h(t)}{dt} = B - \lambda_h R_h - \beta_{ah} S_h (I_h + A_h) - \mu_h S_h$$

$$\frac{dE_h(t)}{dt} = \beta_{ah} S_h (I_h + A_h) - (\delta_h + \gamma_h + k_h + \mu_h) E_h$$

$$\frac{dI_h(t)}{dt} = \delta_h E_h - \mu_h I_h$$

$$\frac{dA_h(t)}{dt} = \gamma_h E_h - \mu_h A_h$$

$$\frac{dR_h(t)}{dt} = k_h E_h - (\mu_h + \lambda_h) R_h$$

2. Terdapat dua titik kesetimbangan yang diperoleh dari model SEIAR penyebaran penyakit rabies pada manusia yaitu:

- a. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

$$E_1 = (S_d, E_d, I_d, A_d, R_d, S_h, E_h, I_h, A_h, R_h) \\ = \left(\frac{A}{\mu_d}, 0, 0, 0, \frac{B}{\mu_h}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

- b. Titik Kesetimbangan Endemik

$$E_2 = (S_d, E_d, I_d, A_d, R_d, S_h, E_h, I_h, A_h, R_h)$$

Dengan

$$S_d = \frac{\mu_d (\delta_d + \gamma_d + k_d + \mu_d)}{\beta_{ad} (\delta_d + \gamma_d)}$$

$$E_d = \frac{\mu_d (I_d + A_d)}{(\delta_d + \gamma_d)}$$

$$I_d = \frac{\delta_d E_d}{\mu_d}$$

$$A_d = \frac{\gamma_d E_d}{\mu_d}$$

$$R_d = \frac{k_d E_d}{(\mu_d + \lambda_d)}$$

$$S_h = \frac{E_h \mu_d (\delta_h + \gamma_h + k_h + \mu_h)}{\beta_{ah} E_d (\delta_d + \gamma_d)}$$

$$E_h = \frac{\beta_{ah} S_h E_d (\delta_d + \gamma_d)}{\mu_d (\delta_h + \gamma_h + k_h + \mu_h)}$$

$$I_h = \frac{\delta_h E_h}{\mu_h}$$

$$A_h = \frac{\gamma_h E_h}{\mu_h}$$

$$R_h = \frac{k_h E_h}{(\mu_h + \lambda_h)}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik saat $R_0 < 1$, dengan $R_0 = \frac{\beta_{ad} A (\delta_d + \gamma_d)}{\mu_d^2 (\delta_d + \gamma_d + k_d + \mu_d)}$, menunjukkan bahwa

penyakit akan menghilang dalam jangka waktu tertentu. Apabila $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik.

4.2 Saran

Pada penelitian ini telah dibuat model SEIAR penyebaran penyakit rabies pada manusia. Model ini masih dapat dikembangkan lagi mengingat masih terdapat penyebab lain yang dapat dipertimbangkan seperti pengaruh migrasi. Model ini juga kiranya dapat digunakan untuk penyakit lainnya yang memenuhi asumsi model SEIAR.

Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini dapat dilaksanakan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, untuk itu peneliti mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing yang telah membantu, mengarahkan dan memberikan bimbingannya selama penulisan tugas akhir ini serta kepada segenap civitas akademika lingkup Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam maupun lingkup Universitas Halu Oleo.

Daftar Pustaka

- [1] Kementerian Kesehatan RI. (2016). *Buku Saku Petunjuk Teknis Penatalaksanaan Kasus Gigitan Hewan Penular Rabies di Indonesia*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pencegahan dan Pengendalian Penyakit.
- [2] F. Y. Rumlawang & M. I. Nanlohy. (2011). Analisa Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Rabies. *Jurnal Berekang*, 5(2), 39-44
- [3] A. Fitri. (2014). Model Matematika (Linier) Populasi Anjing Rabies dengan Vaksinasi. *Jurnal Matematika*, 4(2), 70-79.
- [4] J. Chen, dll. (2015). Modeling the Geographic Spread of Rabies in China. *PLoS Negl Trop Dis*, 9(5), 1-18.
- [5] A. Zainurrifah. (2016). *Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Rabies pada Anjing dengan Vaksinasi*. [Skripsi]. FST: Universitas Airlangga.
- [6] P.van den Driessche & J. Watmough. (2002). Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, 29-48.
- [7] S. Wiggins. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. New York: Springer.

- [8] H. Anton & C. Rores. (2004). *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Received: September 01, 2023

Revised: Desember 01, 2023

Published: Januari 31, 2024