SIFAT-SIFAT RING NIL BERSIH-KUAT
(THE PROPERTIES OF STRONGLY NIL CLEAN RINGS)

Widia Ningsih[1)]
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: widyaningsihtalondara@gmail.com

Arman[1,a)], Norma Muhtar[1,b)], Jufra[1,c)], La Gubu[1,d)]
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo,Kendari, Indonesia
Email: [a)]arman.mtmk@gmail.com,[b)]norma.uho@gmail.com, [c)]jufra.mtmk@uho.ac.id,[d)]la.gubu@uho.ac.id

ABSTRAK

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui sifat-sifat strongly nil clean pada elemen khusus dan ring. Juga untuk mengetahui hubungan antara sifat strongly nil clean dengan ring clean, dan himpunan khusus dalam suatu ring.Penelitian ini dilakukan dengan mengembangkan konsep ring clean dan ring nil clean menjadi ring strongly clean dan ring strongly nil clean dengan menambah aksioma komutatif terhadap operasi perkalian pada elemen khusus dalam ring. Adapun ring yang digunakan sebagai contoh dalam penelitian ini adalahhimpunan bilangan bulat modulo 6 dan himpunan bilangan bulat modulo 8. Hasil yang diperoleh adalah suatu elemen r dalam ring merupakan strongly nil clean jika dan hanya jika r adalah strongly clean dan r jika dikurangkan dengan kuadrat dari dirinya sendiri merupakan suatu elemen nilpoten, dan suatu ring R adalah ring strongly nil clean jika dan hanya jika Jacobson Radikal dari R yang semua elemennya adalah elemen nilpoten merupakan ring Boolean.

Kata kunci : aljabar abstrak, ring clean, ring nil clean, ring strongly clean, dan ring strongly nil clean

ABSTRACT

The objective of this study were to determine the properties of strongly nil clean on special elements and rings. Also to determine the relation between the properties of strongly nil clean with strongly clean ring, and special set in ring. This investigations were expand the clean rings and nil clean rings into a strongly clean ring and strongly nil clean ring by adding a commutative axiom to the operation of multiplication on a special element in the ring. And the rings were used as an example of this study are a set of integers in mod 6 and a set of integers in mod 8. As a result, a r element in the rings is strongly nil clean if and only if r is strongly clean and if r decreasing with its self square is a nilpotent element, and a ring R is strongly nil clean if and only if Jacobson radical of R whose all elements are nilpotent element is a Boolean ring.

Keywords: abstract algebra, clean ring, nil clean ring, strongly clean ring, strongly nil clean ring

1. Pendahuluan

Aljabar adalah salah satu bidang ilmu matematika yang berkembang pesat. Dalam aljabar terdapat beberapa cabang ilmu salah satunya adalah aljabar abstrak. Ilmu yang dipelajari dalam aljabar abstrak, yaitu struktur aljabar.

Struktur aljabar adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Salah satu macam dari struktur aljabar adalah ring. Suatu himpunan tak kosong disebut ring apabila dilengkapi dua operasi biner dan memenuhi aksioma grup abelian pada operasi penjumlahan, semigrup pada operasi perkalian dan berlaku hukum distributif. Suatu ring dikatakan komutatif jika ring tersebut memenuhi sifat komutatif terhadap operasi perkalian.

Dalam struktur ring terdapat elemen khusus, diantaranya adalah nilpoten, idempoten, dan unit. Suatu elemen$a \in R$disebut elemen nilpoten jika berlaku$a^n = 0$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Kemudian, jika berlaku$a^2 = a$ maka $a$disebut suatu elemen idempoten. Sedangkan jika berlaku$ab = 1 = ba$ dimana $b \in R$, maka a elemen R disebut elemen unit. Konsep ring mengalami banyak perkembangan, khususnya ring yang elemennya merupakan hasil penjumlahan dari elemen khusus dalam ring.

Berdasarkan penelitianNicholson dan Zhou [3] pada tahun 2005, suatu ring disebut *clean* jika setiap elemen di dalam ring bersifat *clean* atau elemennya merupakan hasil penjumlahan dari suatu elemen idempoten dan unit. Kemudian, didefinisikan pula bahwa suatu elemen menjadi *strongly clean* jika ditambahkan satu syarat dari definisi *clean* yaitu elemen idempoten dan unit memenuhi komutatif terhadap operasi perkalian. Suatu ring disebut ring *strongly clean* jika setiap elemennya merupakan *strongly clean.*

Selanjutnya, berdasarkan penelitianDiesl [1] pada tahun 2013, suatu elemen di ring disebut elemen *nil clean* jika elemen tersebut merupakan hasil penjumlahan dari suatu nilpoten dan idempoten, dan suatu ring disebut ring *nil clean* jika setiap elemen di ring tersebut bersifat *nil clean.* Kemudian, suatu elemen menjadi elemen *strongly nil clean* dengan menambahkan satu syarat dari definisi *nil clean* yaitu antara elemen idempoten dan nilpoten memenuhi komutatif terhadap operasi perkalian. Suatu ring disebut ring *strongly nil clean* jika setiap elemen di dalamnya merupakan elemen *strongly nil clean*.

Sebagai perkembangan terbaru,Kosan, Wang dan Zhou [2], melanjutkan penelitian mengenai *nil clean* yang fokus membahas struktur dan konstruksi dari ring *strongly nil clean*. Dalam aljabar abstrak, diketahui bahwa suatu ring ada yang memiliki elemen satuan terhadap operasi perkalian (*unital rings*) dan ada yang tidak (*non-unital rings*).

Berdasarkan uraian di atas, maka latar belakang dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana sifat-sifat ring*strongly nil clean*pada suatu ring unital atau ring yang memiliki elemen satuan terhadap operasi perkalian.

Pada bagian dua membahas tentang prosedur penelitian yang dilakukan untuk mendapatkan hasil yang dibahas pada bagian tiga. Adapun bagian tiga membahas tentang hasil yang diperoleh setelah melakukan penelitian. Serta bagian empat membahas tentang kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan sebagaimana yang dibahas pada bagian tiga dan saran yang perlu dilakukan untuk penelitian mendatang.

2. Metode

Adapun prosedur penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Studi literatur mengenai definisi ring *clean*, ring *nil clean*, ring *strongly clean*, dan ring *strongly nil clean*.
2. Mengambil sembarang ring, misalkan R, untuk diperiksa kondisinya apakah memenuhi sifat ring *strongly nil clean.*
   a. Mengambil sembarang $r \in R$ dan diperiksa dekomposisinya, apakah $r = n + d$ dan $nd = dn$ dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$.
   b. Mengambil sembarang $r \in R$ dan diperiksa apakah jika r*strongly nil clean* maka r*strongly clean*.
   c. Mengambil sembarang $r \in R$ dengan dekomposisi $r = u + d$ dimana $u \in U(R)$ dan $d \in Id(R)$, kemudian diperiksa apakah jika $2d - 1 + u$ adalah nilpoten, maka r*strongly nil clean*.
   d. Mengambil sembarang $r \in R$ dan diperiksa apakah jika r*strongly clean* dan $r - r^2$ adalah nilpoten, maka r*strongly nil clean*.
   e. Mengambil sembarang $r \in R$ dan diperiksa apakah jika r adalah elemen *strongly nil clean*, maka r memiliki dekomposisi *strongly nil clean* yang tunggal di R dan juga elemen *strongly clean* yang tunggal di R.
   f. Mengambil sembarang $r \in R$ dan diperiksa apakah jika $\bar{r} \in R/I$ dan I adalah nil ideal di R maka $r \in R$*strongly nil clean*.
   g. Mengambil sembarang $ab \in R$ dan diperiksa apakah jika ab*strongly nil clean*, maka ba juga merupakan *strongly nil clean*.
   h. Mengambil sembarang $ab \in R$ dan diperiksa apakah jika $1 - ab$*strongly nil clean*, maka $1 - ba$ juga *strongly nil clean*.
   i. Membuat kesimpulan mengenai hubungan antara elemen *clean*, *strongly clean*, *nil clean*, dan *strongly nil clean*.
   j. Mengambil sembarang ring R dan diperiksa apakah untuk setiap $r \in R$ merupakan elemen *strongly nil clean*.
   k. Mengambil sembarang ring R dan diperiksa apakah jika $R/J(R)$ adalah ring Boolean dan $J(R)$ adalah himpunan nilpoten, maka R adalah ring *strongly nil clean*.
   l. Mengambil sembarang ring R dan diperiksa apakah jika R/I*strongly nil clean* dan I adalah nil ideal di R, maka R adalah ring *strongly nil clean.*
   m. Membuat kesimpulan mengenai hubungan ring *clean*, *strongly clean*, *nil clean*, dan *strongly nil clean*.
3. Menarik Kesimpulan.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Elemen Nil Bersih-Kuat (*Strongly Nil Clean*)

Definisi 3.1.1 Misalkan R adalah ring dan $r \in R$. Elemen r disebut *strongly nil clean* jika memenuhi dekomposisi $r = n + d$ dan $nd = dn$ dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$.

Contoh 3.1.1
Diberikan ring $\mathbb{Z}_8$. $Id(\mathbb{Z}_8) = (\bar{0}, \bar{1})$ dan $N(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Tentukan $r \in \mathbb{Z}_8$ sedemikian sehingga r adalah elemen *strongly nil clean*.
Penyelesaian.
Akan ditentukan $r \in \mathbb{Z}_8$ sedemikian sehingga r adalah elemen *strongly nil clean*. Hasil penjumlahan elemen idempoten dan nilpoten di $\mathbb{Z}_8$ disajikan dalam Tabel 3.1.1 berikut.

Tabel 3.1.1 Hasi dari $r = n + d$ di $\mathbb{Z}_8$

$d \in Id(\mathbb{Z}_8)$	$n \in N(\mathbb{Z}_8)$	$r = n + d$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{2}$
	$\bar{4}$	$\bar{4}$
	$\bar{6}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
	$\bar{2}$	$\bar{3}$
	$\bar{4}$	$\bar{5}$
	$\bar{6}$	$\bar{7}$

Berdasarkan Tabel 3.1.1, diketahui bahwa untuk setiap $r \in \mathbb{Z}_8$ adalah *nil clean*. Kemudian untuk menentukan $r \in \mathbb{Z}_8$ sedemikian sehingga adalah *strongly nil clean*, maka akan diperiksa apakah berlaku $nd = dn$ dimana $n \in N(\mathbb{Z}_8)$ dan $d \in Id(\mathbb{Z}_8)$.$\mathbb{Z}_8$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan sehingga untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_8$ berlaku $ab = ba$. Sehingga,$nd = dn$ dengan $n \in N(\mathbb{Z}_8)$ dan $d \in Id(\mathbb{Z}_8)$ terpenuhi. Dengan demikian, himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_8$ yaitu $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$.

Proposisi 3.1.1 Misalkan R adalah ring dan $r \in R$. Jika r adalah elemen *strongly nil clean*, maka r elemen *strongly clean*.
Bukti.
Diketahui r adalah elemen *strongly nil clean*, sehingga memenuhi dekomposisi yaitu $r = n + d$ dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$ serta memenuhi $nd = dn$. Dengan demikian, $r = n + d = (2d - 1 + n) + (1 - d)$. $(2d - 1 + n) \in U(R)$ dan $(1 - d) \in Id(R)$ maka r adalah dekomposisi *strongly clean* untuk r. ■

Contoh 3.1.2
Diberikan ring $\mathbb{Z}_6$. $Id(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$, $N(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}\}$, $U(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$. Himpunan elemen *nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Periksa apakah elemen-elemen tersebut merupakan *strongly clean*.
Penyelesaian.
Himpunan elemen *strongly clean* di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, sehingga $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\} \subseteq \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Jadi, himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$, juga merupakan elemen *strongly clean*.

Proposisi 3.1.2 Misalkan R adalah ring dan $r \in R$ dengan dekomposisi $r = u + d$. Elemen r adalah *strongly nil clean* jika dan hanya jika $2d - 1 + u$ adalah elemen nilpoten.
Bukti.
($\Longrightarrow$) Diketahui r adalah *strongly nil clean*, sehingga memiliki dekomposisi $r = n + f$ dengan $n \in N(R)$ dan $f \in Id(R)$ serta memenuhi $nf = fn$. Akan ditunjukkan bahwa $2d - 1 + u$ adalah nilpoten. Dapat dibentuk suatu dekomposisi *strongly clean* yaitu $r = (2f - 1 + n) + (1 - f)$ sedemikian sehingga $(2f - 1 + n) \in U(R)$dan $(1 - f) \in Id(R)$ sedemikian sehingga diperoleh
$2d - 1 + u$
$= 2(1 - f) - 1 + (2f - 1 + n)$
$= (2 - 2f) - 1 + (2f - 1 + n)$
$= 2 - 2f - 1 + 2f - 1 + n$
$= n.$
Dengan demikian, $2d - 1 + u$ adalah nilpoten.
($\Longleftarrow$)Diketahui $2d - 1 + u$ adalah nilpoten, sehingga $r = n + d = (2d - 1 + u) + (1 - d)$. Secara jelas merupakan dekomposisi *strongly nil clean*, karena $(2d - 1 + u) \in N(R)$ dan $(1 - d) \in Id(R)$. ■

Contoh 3.1.3
Diberikan ring $\mathbb{Z}_6$. Himpunan elemen *nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Periksa apakah himpunan elemen tersebut adalah *strongly nil clean* dengan membuktikan $2d - 1 + u$ adalah nilpoten.
Penyelesaian.
Diketahui $Id(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$, $N(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}\}$, $U(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$. Akan diperiksa apakah $2d - 1 + u$ adalah nilpoten.

Tabel 3.1.2 Hasil operasi $2d - 1 + u$ di $\mathbb{Z}_6$

$d \in Id(\mathbb{Z}_6)$	$2d$	$u \in U(\mathbb{Z}_6)$	$2d - 1 + u$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
		$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
		$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
		$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
		$\bar{5}$	$\bar{0}$

Dengan demikian, himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

Teorema 3.1.1 Misalkan R adalah ring dan $r \in R$. Elemen r adalah *strongly nil clean* jika dan hanya jika r adalah *strongly clean* di R dan $r - r^2$ adalah nilpoten.

Bukti.

($\Longrightarrow$) Diketahui $r \in R$ adalah *strongly nil clean* di R, sedemikian sehingga r memenuhi dekomposisi *strongly nil clean* yaitu $r = n + d = (2d - 1 + n) + (1 - d)$ dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$ serta memenuhi $nd = dn$. Berdasarkan Proposisi 3.1.2, r merupakan elemen *strongly clean* di R. Kemudian, akan ditunjukkan bahwa $r - r^2$ merupakan nilpoten. Diketahui, r memenuhi dekomposisi *strongly nil clean* yaitu $r = n + d$, sehingga

$$\begin{aligned} r^2 &= (n+d)^2 \\ &= n^2 + 2dn + d^2 \\ &= n^2 + 2dn + d \end{aligned}$$

Kemudian,

$$\begin{aligned} r - r^2 &= (n+d) - (n^2 + 2dn + d) \\ &= n - n^2 - 2dn \\ &= (1 - n - 2d)n. \end{aligned}$$

Karena $1 - n - 2d \in R$ dan $n \in N(R)$ maka jelas bahwa $(1 - n - 2d)n$ adalah nilpoten.

($\Longleftarrow$)Diketahui $r \in R$ adalah elemen *strongly clean* di R dan $r - r^2$ adalah nilpoten, sehingga r memenuhi dekomposisi *strongly clean* yaitu $r = u + d \cdot r = u + d$. Sehingga,

$$\begin{aligned} r^2 &= (u+d)^2 \\ &= u^2 + 2du + d^2 \\ &= u^2 + 2du + d. \end{aligned}$$

Dan diperoleh

$$\begin{aligned} r - r^2 &= (u+d) - (u^2 + 2du + d) \\ &= u - u^2 - 2du \\ &= (1 - u - 2d)u. \end{aligned}$$

Diketahui $r - r^2 = (1 - u - 2d)u$ adalah nilpoten, sehingga $(1 - u - 2d)$ adalah nilpoten. Kemudian, $r = -(1 - u - 2d) + (1 - d) = u + d$dimana $r = u + d$ adalah dekomposisi *strongly nil clean* untuk r. ∎

Contoh 3.1.4

Diberikan ring $\mathbb{Z}_8$. Himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_8$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Periksa apakah elemen-elemen tersebut adalah *strongly clean* di $\mathbb{Z}_8$dan $r - r^2$
adalah suatu nilpoten.

Penyelesaian.

Untuk setiap$r \in \mathbb{Z}_8$merupakan*stronglyclean*. Selanjutnya akan dibuktikan $r - r^2$ adalah nilpoten.

Tabel 3.1.3 Hasil dari $r - r^2$ dengan $r \in \mathbb{Z}_8$

$r \in \mathbb{Z}_8$	r^2	$r - r^2$
$\bar{0}$	$\bar{0}^2 = \bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}^2 = \bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}^2 = \bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{3}$	$\bar{3}^2 = \bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}^2 = \bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{5}^2 = \bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}^2 = \bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{7}$	$\bar{7}^2 = \bar{1}$	$\bar{6}$

Berdasarkan Tabel 3.1.3, jelas $r - r^2$ adalah suatu nilpoten dari $\mathbb{Z}_8$ yaitu $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$.

Lemma 3.1.1 Misalkan R adalah ring dan $r \in R$. Jika r adalah suatu elemen *strongly nil clean* dari R maka berlaku:

(i). Elemen r memiliki dekomposisi *strongly nil clean* yang tunggal di R.

(ii). Elemen r adalah suatu elemen *strongly clean* yang tunggal di R.

Bukti.

(i). Diketahui r adalah suatu elemen *strongly nil clean* di R. Menurut Proposisi 3.1.1, r adalah elemen *strongly clean* dengan dekomposisi tunggal. Dengan demikian,r memiliki dekomposisi *strongly nil clean* yang tunggal.

(ii). Diketahui r adalah suatu elemen *strongly nil clean* di R. Pada Teorema 3.1.1, dikatakan bahwa r juga merupakan *strongly clean* di R dan $r - r^2$ adalah suatu nilpoten. Akan ditunjukkan bahwa r adalah suatu elemen *strongly clean* yang tunggal di R. Hal ini berlaku, karena berdasarkan bukti dari Teorema 3.1.1, seharusnya dua elemen idempoten berbeda yang membentuk dekomposisi elemen *strongly clean* dari r menghasilkan dua idempoten berbeda yang membentuk dekomposisi *strongly nil clean* dari r, namun hal tersebut tidak terpenuhi. Oleh karena itu, r adalah *strongly clean* yang tunggal di R. ∎

Proposisi 3.1.3 Misalkan R adalah ring, I nil ideal di R. Jika $\bar{r} \in R/I$ adalah *strongly nil clean* maka $r \in R$ adalah *strongly nil clean*.

Bukti.

Diketahui bahwa $\bar{r} \in R/I$ adalah *strongly nil clean*, sehingga memiliki dekomposisi $\bar{r} = \bar{n} + \bar{d}$ dengan $\bar{n} = n + I \in N(R/I)$ dan $\bar{d} = d + I \in Id(R/I)$ serta memenuhi $\bar{n}\bar{d} = \bar{d}\bar{n}$. Kemudian, $\bar{r}$ dapat dinyatakan sebagai $\bar{r} = \bar{n} + \bar{d} = \left(\overline{2d - 1 + n}\right) + \left(\overline{1 - d}\right)$ sehingga untuk $\bar{d} = d + I \in Id(R/I)$ terdapat $d \in Id(R)$ dan $n = r + d \in N(R)$ sehingga r adalah *strongly nil clean*. ∎

Contoh 3.1.5

Diberikan ring$\mathbb{Z}_6$ dengan $I = \{\bar{0}\}$ adalah nil ideal. Diperoleh koset dari $\mathbb{Z}_6/I$ adalah $\{\bar{0} + I, \bar{1} + I, \bar{2} + I, \bar{3} + I, \bar{4} + I, \bar{5} + I\}$, maka$Id(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0} + I, \bar{1} + I, \bar{3} + I, \bar{4} + I\}$, $N(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0} + I\}$, $U(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1} + I, \bar{5} + I\}$. Himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6/I$ adalah $\{\bar{0} + I, \bar{1} + I, \bar{3} + I, \bar{4} + I\}$. Buktikan bahwa $r \in \mathbb{Z}_6$ *strongly nil clean*.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa $r \in \mathbb{Z}_6$ *strongly nil clean*. Himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6/I$ adalah $\{\bar{0} + I, \bar{1} + I, \bar{3} + I, \bar{4} + I\}$. Berdasarkan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6/I$ yaitu $\bar{r}$ diperoleh elemen r

yaitu $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$. $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$ adalah elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$.

Teorema 3.1.2 Misalkan R adalah suatu ring dan $a, b \in R$. Jika ab adalah *strongly nil clean*, maka ba adalah *strongly nil clean*.

Bukti.

ab adalah *strongly clean* jika dan hanya jika ba adalah *strongly clean*. Akan ditunjukkan bahwa jika ab*strongly nil clean*, maka ba*strongly nil clean*. Diketahui ab adalah *strongly nil clean* sedemikian sehingga memiliki dekomposisi $ab = n + d$ serta memenuhi aksioma $nd = dn$. Kemudian, akan ditunjukkan bahwa $ab - (ab)^2$adalah suatu nilpoten jika dan hanya jika $ba - (ba)^2$ adalah suatu nilpoten. Hal ini jelas karena

$$[ab - (ab)^2]^{n+1} = a[ba - (ba)^2]^n(bab - b)$$

dengan $a, b \in R$. ∎

Akibat 3.1.1 Misalkan R adalah ring dan $a, b \in R$. Jika $1 - ab$ merupakan *strongly nil clean*, maka $1 - ba$ juga merupakan *strongly nil clean*.

Bukti.

Diketahui untuk $x \in R$, jika x*strongly nil clean*, maka $1 - x$*strongly nil clean*. Menurut Teorema 3.1.2, karena ab*strongly nil clean* maka diperoleh ba juga merupakan *strongly nil clean*. Jadi, $1 - ba$ adalah *strongly nil clean*. ∎

Contoh 3.1.7

Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan,$\mathbb{Z}_8$. $r \in \mathbb{Z}_8$ sedemikian sehingga r adalah *strongly nil clean* adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Buktikan bahwa untuk $a, b \in \mathbb{Z}_8$, jika $1 - ab$ adalah *strongly nil clean*, maka $1 - ba$ juga *strongly nil clean*.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa untuk $a, b \in \mathbb{Z}_8$, jika $1 - ab$ adalah *strongly nil clean*, maka $1 - ba$ juga *strongly nil clean*.

Tabel 3.1.4 Hasil dari $1 - ab$ di $\mathbb{Z}_8$

$1 - ab$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$
$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.1.4, terbukti bahwa untuk $a, b \in \mathbb{Z}_8$, jika $1 - ab$ adalah *strongly nil clean*, maka berlaku pula pada $1 - ba$. Hal ini terpenuhi karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_8$ memenuhi sifat tertutup dan komutatif terhadap operasi perkalian. Ambil $a = \bar{7}$ dan $b = \bar{3}$. Akan ditunjukkan jika $1 - ab$ adalah *strongly nil clean*, maka $1 - ba$ juga merupakan *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_8$. Perhatikan uraian berikut.

$$1 - (\bar{7})(\bar{3}) = \bar{4} = 1 - (\bar{3})(\bar{7}).$$

Dengan demikian, Akibat 3.1.1 berlaku.

3.2 Ring Nil Bersih-Kuat (*Strongly Nil Clean*)

Definisi 3.2.1 Misalkan Radalah suatu ring dan $r \in R$. R adalah *strongly nil clean* jika untuk setiap $r \in R$ merupakan *strongly nil clean*.

Contoh 3.2.1

Diberikan ring $\mathbb{Z}_8$. Diketahui bahwa $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $N(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Periksa apakah $\mathbb{Z}_8$ adalah ring *strongly nil clean*.

Penyelesaian.

Berdasarkan pada Contoh 3.1.1, diketahui bahwa untuk setiap $r \in R$ adalah *strongly nil clean*, sehingga $(\mathbb{Z}_8, +, *)$ merupakan ring *strongly nil clean*.

Teorema 3.2.1 Suatu ring R adalah *strongly nil clean* jika dan hanya jika $R/J(R)$ adalah ring Boolean dan $J(R)$ adalah himpunan nilpoten.

Bukti.

($\Longrightarrow$) Diketahui R adalah *strongly nil clean*, sehingga R adalah *uniquely strongly clean*, sehingga $R/J(R)$ adalah Boolean. $R/J(R)$ adalah ring Boolean. Selanjutnya, misalkan $r \in J(R)$ dan $r = n + d$ adalah dekomposisi *strongly nil clean*, karena $R/J(R)$ adalah Boolean dan n adalah nilpoten, diperoleh $n \in J(R)$. Dengan demikian, $d = r - n \in J(R)$. Misalkan $d = 0$ maka diperoleh $r = n$ adalah nilpoten.

($\Longleftarrow$) Misalkan $r \in R$. Diketahui $J(R)$ nilpoten, sehingga berdasarkan Teorema 3.1.1, $r - r^2 \in J(R)$. Karena $J(R)$ nilpoten sehingga terdapat $d \in Id(R)$ dan $r - d \in J(R)$. Dengan begitu, $r = d + (r - d) + d = n + d$ merupakan dekomposisi *strongly nil clean*. Jadi, R adalah *strongly nil clean*. ∎

Contoh 3.2.2

$\mathbb{Z}_8$ adalah ring *strongly nil clean*. Buktikan bahwa $\mathbb{Z}_8/J(R)$ adalah nilpoten.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_8/J(R)$ adalah nilpoten. Sebelum dibuktikan kebenaran dari pernyataan tersebut, akan dibuktikan terlebih dahulu Jacobson Radikal dari ring $\mathbb{Z}_8$ atau $J(\mathbb{Z}_8)$. $J(\mathbb{Z}_8)$ adalah $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$, diperoleh $\mathbb{Z}_8/J(\mathbb{Z}_8)$ adalah $J(\mathbb{Z}_8) + \bar{0}$ dan $J(\mathbb{Z}_8) + \bar{1}$. Selanjutnya akan dibuktikan ketentuan yang pertama.

Tabel 3.2.1 Operasi kuadrat antara elemen $\mathbb{Z}_8/J(\mathbb{Z}_8)$

$a \in \mathbb{Z}_8/J(\mathbb{Z}_8)$	$J(\mathbb{Z}_8) + \bar{0}$	$J(\mathbb{Z}_8) + \bar{1}$
a^2	$J(\mathbb{Z}_8) + \bar{0}$	$J(\mathbb{Z}_8) + \bar{1}$

Karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_8/J(\mathbb{Z}_8)$ adalah elemen idempoten, sehingga $\mathbb{Z}_8/J(\mathbb{Z}_8)$ adalah ring Boolean. Kemudian, karena $J(\mathbb{Z}_8)$ sama dengan $N(\mathbb{Z}_8)$ maka jelas $J(\mathbb{Z}_8)$ adalah nilpoten.

Proposisi 3.2.1 Misalkan R adalah ring dan I adalah nil ideal di R. R adalah *strongly nil clean* jika dan hanya jika R/I*strongly nil clean*.

Bukti.

($\Longrightarrow$)Misalkan R adalah ring *strongly nil clean*, maka untuk setiap $r \in R$ berlaku $r = n + d$, dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$. Karena pemetaan homomorfisma maka untuk $d \in Id(R)$ terdapat $\bar{d} \in Id(R/I)$, sehingga $\bar{n} = \bar{d} \in N(R/I)$. Hal ini menunjukkan bahwa R/I adalah ring *strongly nil clean*.

($\Longleftarrow$) Misalkan R/I adalah ring *strongly nil clean*, maka untuk setiap $\bar{r} \in R/I$ berlaku $\bar{r} = \bar{n} + \bar{d}$, dimana $\bar{n} \in N(R/I)$ dan $\bar{d} \in Id(R/I)$. Karena pemetaan homomorfisma maka untuk $\bar{d} \in Id(R/I)$ terdapat $d \in Id(R)$ dan $n = r - d \in N(R)$ sehingga $r \in R$ adalah *strongly nil clean*. Dengan demikian, terbukti bahwa R adalah ring *strongly nil clean*. ■

Contoh 3.2.3

Diberikan ring $\mathbb{Z}_8$ dan himpunan $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ adalah nil ideal. Dari Contoh 4.2.1, diketahui $\mathbb{Z}_8$ merupakan ring *strongly nil clean*. Buktikan bahwa $\mathbb{Z}_8/I$ adalah ring *strongly nil clean*.

Bukti.

Berdasarkan Definisi 2.3.9, diketahui $\mathbb{Z}_8/I = \{\bar{0} + I, \bar{1} + I\}$, sehingga $Id(\mathbb{Z}_8/I) = \{\bar{0} + I, \bar{1} + I\}$, $N(\mathbb{Z}_8/I) = \{\bar{0} + I\}$, dan $U(\mathbb{Z}_8/I) = \{\bar{1} + I\}$. Himpunan elemen *strongly nil clean* dan memenuhi aksioma $(\bar{n} + I)(\bar{d} + I) = (\bar{d} + I)(\bar{n} + I)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\mathbb{Z}_8/I$ adalah ring *strongly nil clean*.

4. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka dapat dibuat kesimpulan yaitu sebagai berikut.

1. Radalah suatu ring dan $r \in R$. Elemen r adalah elemen *strongly nil clean* jika dan hanya jika r adalah elemen *strongly clean* di R dan $r - r^2$ merupakan elemen nilpoten.
2. R adalah ring *strongly nil clean* jika dan hanya jika ring faktor $R/J(R)$ dengan $J(R)$adalah Jacobson radikal adalah ring Boolean dan $J(R)$ adalah nilpoten.

Penelitian ini hanya fokus membahas sifat-sifat *strongly nil clean* pada ring unital atau suatu ring yang memiliki elemen satuan terhadap operasi perkalian, tetapi tidak membahas tentang sifat-sifat *strongly nil clean* pada ring non-unital. Dengan demikian, penulis menyarankan untuk mengkaji sifat-sifat *strongly nil clean* pada ideal dan ring non-unital untuk penelitian selanjutnya.

Ucapan Terimakasih

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah Tuhan Semesta Alam, karena atas berkat dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan karya tulis ilmiah ini. Serta, terimakasih kepada pembimbing dan penguji skripsi saya atas bimbingan, saran dan kritik yang diberikan.

Daftar pustaka

[1] A. J. Diesl. 2013. *Nil clean rings*. Journal of Algebra. 383. 197–211.

[2] T. Kosan, Z. Wang, and Y. Zhou. 2016. *Nil-clean and strongly nil-clean rings*. Journal of Pure and Applied Algebra. 220(2). 633–646.

[3] W. K. Nicholson and Y. Zhou. 2005. *Clean general rings*. Journal of Algebra. 291. 297–311.