ESTIMASI MAKSIMUM LIKELIHOOD UNTUK PARAMETER DALAM MODEL REGRESI BETA

Elga Dwi Suanda[1)]
[1)]Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Indonesia
Email : elgadwi2@gmail.com

Wayan Somayasa[1,a)] dan **Muh. Kabil Djafar**[1,b)]
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Indonesia
Email: [a)]wayan.somayasa@uho.ac.id, [b)]kabil.djafar@uho.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan membahas estimasi maksimum *likelihood* untuk parameter pada model regresi beta. Sebelum memulai proses estimasi, terlebih dahulu dilakukan uji *goodness-of-fit* untuk mengetahui apakah variabel bebas Y berdistribusi beta. Kemudian, dilakukan pemilihan model terbaik menggunakan metode *AIC* (*Akaike Information Criterion*) sehingga didapatkan bahwa model polinomial berderajat 5 adalah yang terbaik. Dalam proses estimasi, fungsi log-*likelihood* model regresi beta tidak dapat diselesaikan secara analitik, sebab bukan merupakan fungsi yang linear. Sehingga parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan κ diestimasi dengan pendekatan numerik menggunakan metode Newton-Raphson. Terakhir, akan dibahas pula contoh pengaplikasian dari model regresi beta pada data pengaruh nilai IKK terhadap nilai IPM Kabupaten/Kota di Indonesia Tahun 2020.

Kata Kunci **:** Distribusi Beta, Regresi Beta, Fungsi Hubung Logit, Metode Maksimum *Likelihood*, Metode Newton-Raphson

ABSTRACT

This study aims to discuss the maximum likelihood estimation for the parameters in the beta-regression model. Before starting the estimation process, a goodness-of-fit test is first performed to determine whether the independent variable Y has a beta distribution. Then, the best model was selected using the *AIC* (*Akaike Information Criterion*) method so that it was found that the 5th-degree polynomial model was the best. In the estimation process, the log-*likelihood* function of the beta regression model cannot be solved analytically, because it is not a linear function. So that the parameters $\boldsymbol{\beta}$ and κ are estimated with a numerical approach using the Newton-Raphson method. Finally, we will also discuss examples of the application of the beta regression model to the data on the effect of the CCI (Cost Construction Index) value on the HDI (Human Development Index) value of regency/municipality in Indonesia in 2020.

Keywords **:** Beta Distribution, Beta Regression, Logit Link Function, Maximum Likelihood Method, Newton-Raphson Method

1. Pendahuluan

Menurut Sudarmanto (2005), analisis regresi merupakan salah satu analisis yang menjelaskan tentang akibat-akibat dan besarnya akibat yang ditimbulkan oleh satu atau lebih variabel prediktor terhadap satu variabel kriterium. Dengan kata lain, analisis regresi digunakan untuk menggambarkan model hubungan antara dua variabel atau lebih. Hubungan ini dinyatakan dalam persamaan matematik yang antara variabel-variabelnya terhubung secara fungsional. Hubungan fungsional antara satu variabel prediktor dan satu variabel kriterium disebut analisis regresi sederhana, sedangkan hubungan fungsional yang lebih dari satu variabel disebut analisis regresi ganda (Gunawan, 2017).

Model regresi yang paling banyak diterapkan diberbagai bidang biasanya merupakan model regresi klasik yang mengasumsikan bahwa galat berdistribusi normal. Namun, model regresi ini tidak selalu dapat digunakan dalam bidang penelitian tertentu. Masalah ini dapat diatasi dengan menggunakan pendekatan maksimum *likelihood* berdasarkan pada fungsi *likelihood* dari distribusi binomial sebagai dasar pada pemodelan regresi logistik. Pendekatan lain yang dapat digunakan adalah dengan pemodelan regresi beta (Hajarisman, 2012).

Menurut Swearingen et al (2011) model regresi beta merupakan model yang jika dibandingkan dengan metode kuadrat terkecil biasa, akan memberikan penaksir parameter yang akurat dan efisien, ketika variabel respons memiliki distribusi yang tidak simetris, atau ketika terjadi masalah heteroskedastisitas. Model regresi beta yaitu model regresi yang mengasumsikan variabel dependen/respons berdistirbusi beta (Hajarisman, 2012).

Distribusi beta biasanya digunakan untuk memodelkan data yang dibatasi pada interval $(0,1)$. Diindeks oleh dua parameter, p dan q. Parameter-parameter ini mengontrol bentuk fungsi kepadatan, yang dapat berbentuk rata, simetris, asimetris ke kiri atau asimetris ke kanan. Singkatnya, kepadatannya dapat menampilkan bentuk yang sangat berbeda tergantung pada nilai parameter, yang membuat distribusi beta menjadi distribusi yang fleksibel untuk pemodelan data yang dibatasi pada interval antara nol dan satu (Cribari-Neto & Vasconcellos, 2002).

Mengestimasi parameter distribusi beta p dan q dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa pendekatan yang berbeda, meskipun estimasi maksimum *likelihood* adalah pendekatan yang paling umum digunakan. Dishon dan Weiss (1980) memberikan perbandingan sampel kecil dari penduga untuk parameter distribusi beta yang diperoleh dari metode maksimum *likelihood* dan dari metode momen. Hasilnya mendukung bahwa estimasi dengan metode maksimum *likelihood* (Cribari-Neto & Vasconcellos, 2002).

Penelitian ini bertujuan untuk mencoba menyelidiki bagaimana mengestimasi parameter dalam model regresi beta menggunakan metode maksimum *likelihood* dengan pendeskripsian yang lengkap.

Pada bagian dua dibahas dasar teori yang mendukung penyelesaian masalah yang dibahas dalam penelitian ini. Penurunan rumus estimasi maksimum likelihood distribusi beta serta penerapannya pada data real disajikan pada bagian tiga. Paper ditutup dengan kesimpulan dan saran pada bagian empat.

2. Kajian Pustaka

2.1 Distribusi Beta

Distribusi beta adalah salah satu distribusi probabilitas kontinu yang didefinisikan pada interval $[0,1]$ dan memiliki dua parameter bernilai positif, dilambangkan dengan α dan β , yang berperan sebagai eksponen variabel acak dan mengontrol bentuk dari distribusi Beta (Ridiani, 2013).

Definisi 2.1 Jika suatu variabel acak X memiliki kepadatan yang diberikan oleh

$$f_X(x) = f_X(x; a, b) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \quad (1)$$

untuk $0 < x < 1$, dimana $a > 0$ dan $b > 0$, maka X didefinisikan berdistribusi beta. Fungsi $\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$, disebut sebagai fungsi beta (Mood, Graybill, & Boes, 1986).

Fungsi densitas variabel acak berdistribusi beta diberikan oleh

$$f(y; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} y^{a-1}(1-y)^{b-1} \ , 0 < y < 1 \quad (2)$$

dimana $a > 0$, $b > 0$ dan $\Gamma(.)$ merupakan fungsi gamma (Hajarisman, 2012).

Teorema 2.1 Jika X variabel acak berdistribusi beta maka

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b} \quad (3)$$

dan

$$Var(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2} \quad (4)$$

(Mood, Graybill, & Boes, 1986).

2.2 Model Regresi Beta

a. Reparameterisasi Fungsi Densitas Beta

Untuk membentuk model regresi beta bersamaan dengan rata-rata respons dan parameter dispersinya, maka fungsi densitas betanya perlu dilakukan reparameterisasi. Misalkan $\mu = a/(a+b)$ dan $\kappa = a+b$, sehingga diperoleh bahwa $a = \mu\kappa$ dan $b = (1-\mu)\kappa$. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (3) dan (4) diketahui bahwa

$$E(y) = \mu \quad (5)$$

dan

$$\mathrm{var}(y) = \frac{\mu(1-\mu)}{\kappa+1} \quad (6)$$

dimana μ adalah rata-rata dari variabel respons (terikat) dan κ bisa dianggap sebagai parameter presisi, dalam arti bahwa untuk μ tertentu, maka nilai dari κ lebih besar akan memberikan varians bagi variabel respons yang lebih kecil.

Setelah dilakukan reparameterisasi, maka fungsi kepadatan variabel acak y yang berdisribusi beta adalah sebagai berikut :

$$f(y; \mu, \kappa) = \frac{\Gamma(\kappa)}{\Gamma(\mu\kappa)\Gamma((1-\mu)\kappa)} y^{\mu\kappa-1}(1-y)^{(1-\mu)\kappa-1} \quad (7)$$

Parameterisasi ini menyatakan bahwa $0 < \mu < 1$ dan $\kappa > 1$, sehingga ditunjukkan bahwa $\alpha = \mu\kappa > 0$ dan $b = \kappa(1-\mu) > 0$.

b. Bentuk Model Regresi Beta

Membentuk model regresi beta dilakukan melalui pendekatan model linear umum, dalam kasus ini diperlukan dua buah fungsi hubung. Fungsi hubung untuk parameter lokasi μ, dan fungsi hubung untuk parameter dispersi κ . Misalkan **X** dan **W** merupakan matriks kovariat (bisa identik), dimana kedua matriks tersebut memiliki vektor baris ke-i yaitu $\mathbf{x}_i$ dan $\mathbf{w}_i$. Dimisalkan pula β dan δ adalah vektor koefisien regresi beta. Sehingga, model linear umum parameter lokasi μ_i adalah

$$g(\mu_i) = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \ , \ i = 1,2, \dots , n \quad (8)$$

dimana $g(.)$ adalah fungsi monoton, yaitu fungsi hubung yang mempunyai turunan.

Parameter presisi κ_i diasumsikan dapat dimodelkan sebagai berikut :

$$h(\kappa_i) = \mathbf{w}_i \boldsymbol{\delta} \quad (9)$$

dimana h merupakan fungsi hubung yang lain. Menurut Smith (1989), fungsi *likelihood* bagi β ketika δ konstan akan terbentuk submodel lokasi. Namun, jika fungsi *likelihood* bagi δ ketika β konstan, maka yang akan terbentuk adalah submodel dispersi (Hajarisman, 2012).

Misalkan $y_1, \dots, y_n$ adalah variabel acak saling bebas, dimana untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$, y_i mengikuti densitas yang diberikan dalam persamaan (7) dengan rata-rata μ_i dan parameter dispersi κ yang tidak diketahui sehingga dapat ditulis $y_i \sim B(\mu_i, \kappa)$.

$$g(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_q x_q = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}$$

Model diperoleh dengan cara mengasumsikan bahwa rata-rata y_i dapat ditulis sebagai berikut :

$$g(\mu_i) = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \quad (10)$$

$$= \sum_{j=0}^{q} x_{ij}\beta_j = \eta_i \, , i = 1,2, \dots n$$

dimana $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q)$ adalah vektor dari parameter regresi, dan $\mathbf{x}_i = (x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{iq})$ merupakan data pengamatan pada q buah kovariat, dengan $x_{i0} = 1$, yang diasumsikan tetap (*fixed*) dan diketahui.

Fungsi hubung logit $g(\mu_i)$ didefinisikan sebagai

$$g(\mu_i) = logit(\mu_i) = \ln\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right)$$
$$= \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \rightarrow \mu_i = \frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})}{1+\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})} \quad (11)$$

3. Hasil dan Pembahasan

Estimasi maksium *Likelihood* adalah salah satu metode yang digunakan untuk menaksir paramater yang nilainya belum diketahui dengan peluang maksimum. Tujuan dari metode ini adalah untuk menemukan nilai parameter yang dapat memaksimalkan atau memaksimumkan probabilitas pengamatan data yang biasanya dilakukan dengan metode derivatif atau turunan.

3.1 Penaksiran Parameter

Untuk $y_i \sim B(\mu_i, \kappa)$, diketahui dari persamaan (11) bahwa $\mu_i = \frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})}{1+\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})}$, dimana $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ dan κ adalah parameter yang akan diestimasi, sehingga fungsi kepadatan y_i berdistribusi beta adalah

$$f(y_i; \boldsymbol{\beta}, \kappa) = \frac{\Gamma(\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)} y_i^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa - 1}(1-y_i)^{(1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa - 1} \quad (12)$$

Fungsi *likelihood* dari fungsi kepadatan y_i pada persamaan (12) adalah sebagai berikut :

$$L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \boldsymbol{\beta}, \kappa)$$
$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma(\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}\right]\left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa - 1}\right) \left(\prod_{i=1}^{n}(1-y_i)^{(1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa - 1}\right) \quad (13)$$

Selanjutnya, menentukan fungsi log *likelihood* dari fungsi *likelihood* pada persamaan (13) yaitu sebagai berikut :

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(y_i; \boldsymbol{\beta}, \kappa)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \ln\left[\Gamma(\kappa)\, \Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)^{-1}\, \Gamma\left((1 - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)^{-1}\right] + \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa - 1)\ln y_i + \sum_{i=1}^{n}\left((1 - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa - 1\right)\ln(1-y_i) \quad (14)$$

Estimasi untuk vektor $\boldsymbol{\beta}$ dan κ dapat diperoleh dengan mendeferensialkan persamaan (14) terhadap parameter yang mengikutinya :

a) Diturunkan terhadap β_j, $j = 0,1,2, \dots, q$.

Untuk $\frac{\partial}{\partial \beta_0} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_0} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\kappa \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial}{\partial \beta_0}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} + \kappa \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial}{\partial \beta_0}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}{\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)} + \kappa \sum_{i=1}^{n} x_{i0} \ln y_i - \kappa \sum_{i=1}^{n} x_{i0} \ln(1-y_i) = 0 \quad (15)$$

Untuk $\frac{\partial}{\partial \beta_1} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\kappa \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \frac{\frac{\partial}{\partial \beta_1}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} + \kappa \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \frac{\frac{\partial}{\partial \beta_1}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}{\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)} + \kappa \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \ln y_i - \kappa \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \ln(1-y_i) = 0 \quad (16)$$

Untuk $\frac{\partial}{\partial \beta_2} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_2} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\kappa \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \frac{\frac{\partial}{\partial \beta_2}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} + \kappa \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \frac{\frac{\partial}{\partial \beta_2}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}{\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)} + \kappa \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \ln y_i - \kappa \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \ln(1-y_i) = 0 \quad (17)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan cara yang sama diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial \beta_q} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & -\kappa \sum_{i=1}^{n} x_{iq} \frac{\frac{\partial}{\partial \beta_q}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} + \kappa \sum_{i=1}^{n} x_{iq} \frac{\frac{\partial}{\partial \beta_q}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}{\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)} \\ & +\kappa \sum_{i=1}^{n} x_{iq} \ln y_i - \kappa \sum_{i=1}^{n} x_{iq} \ln(1-y_i) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

b) Diturunkan terhadap κ

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{n}{\Gamma(\kappa)}\Gamma'(\kappa) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial}{\partial \kappa}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \\ & - \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial}{\partial \kappa}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}{\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)} (1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) + \\ & \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \ln y_i \\ & + \sum_{i=1}^{n} (1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \ln(1-y_i) = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Persamaan (15) hingga (19) tidak dapat diselesaikan secara analitik , sebab $\frac{\partial}{\partial \beta_0} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)$, $\frac{\partial}{\partial \beta_1} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)$, $\frac{\partial}{\partial \beta_2} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)$, … , $\frac{\partial}{\partial \beta_q} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)$ dan $\frac{\partial}{\partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)$ merupakan fungsi yang tidak linear. Pada penelitian ini digunakan metode iterasi Newton-Raphson untuk mencari akar-akar dari Persamaan (15) sampai dengan (19).

3.2 Metode Newton-Raphson untuk Model Regresi Beta

Rumus umum metode Newton-Raphson untuk kasus model regresi beta, berdasarkan persamaan (20) dapat dimisalkan :

$$\boldsymbol{x}_{(i+1)} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0^{(i+1)} \\ \hat{\beta}_1^{(i+1)} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_q^{(i+1)} \\ \hat{\kappa}^{(i+1)} \end{pmatrix}; \ \boldsymbol{x}_{(i)} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0^{(i)} \\ \hat{\beta}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_q^{(i)} \\ \hat{\kappa}^{(i)} \end{pmatrix}; \ f(\boldsymbol{x}_{(i)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_0} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)^{(i)} \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)^{(i)} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_q} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)^{(i)} \\ \frac{\partial}{\partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)^{(i)} \end{pmatrix}$$

dimana $\boldsymbol{x}_{(i)}$ adalah vektor nilai penduga pada iterasi ke$-i$ untuk parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan κ, dan $f(\boldsymbol{x}_{(i)})$ adalah vektor skor yang merupakan turunan pertama dari fungsi log-*likelihood* terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan κ.

Matriks Hessian dimisalkan dengan $H_{\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa)}$ merupakan matriks yang elemennya adalah turunan kedua dari fungsi log-*likelihood* terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan κ yaitu

$$H_{\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{(\partial\beta_0)^2}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial^2}{\partial\beta_0\partial\beta_1}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \cdots & \frac{\partial}{\partial\beta_0\partial\beta_q}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial}{\partial\beta_0\partial\kappa}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) \\ \frac{\partial}{\partial\beta_1\partial\beta_0}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial}{(\partial\beta_1)^2}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \cdots & \frac{\partial}{\partial\beta_1\partial\beta_q}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial}{\partial\beta_1\partial\kappa}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) \\ \frac{\partial}{\partial\beta_2\partial\beta_0}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial^2}{\partial\beta_2\partial\beta_1}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \cdots & \frac{\partial}{\partial\beta_2\partial\beta_q}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial}{\partial\beta_2\partial\kappa}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\beta_q\partial\beta_0}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial^2}{\partial\beta_q\partial\beta_1}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \ddots & \frac{\partial}{(\partial\beta_q)^2}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial}{\partial\beta_q\partial\kappa}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) \\ \frac{\partial}{\partial\kappa\partial\beta_0}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial^2}{\partial\kappa\partial\beta_1}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial\kappa\partial\beta_q}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial}{(\partial\kappa)^2}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) \end{bmatrix}$$

Nilai dari setiap elemen-elemen matriks Hessian tersebut dapat ditulis secara matematis sebagai berikut :

1) Untuk $\frac{\partial^2}{\partial \beta_s \partial \beta_r} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)$, dimana $s = 0,1,\dots,q$ dan $r = 0,1,\dots,q$

$$\begin{aligned} &= -k^2 \sum_{i=1}^{n} \left(x_{is} x_{ir} \left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial\beta_s\partial\beta_r}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} - \frac{\frac{\partial}{\partial\beta_r}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)\frac{\partial}{\partial\beta_s}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\left(\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)\right)^2} \right] \right) \\ &\quad -k^2 \sum_{i=1}^{n} \left(x_{is} x_{ir} \left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial\beta_s\partial\beta_r}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}{\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)} - \frac{\frac{\partial}{\partial\beta_r}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)\frac{\partial}{\partial\beta_s}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}{\left[\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)\right]^2} \right] \right) \end{aligned}$$

2) Untuk $\frac{\partial^2}{\partial \beta_s \partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = \frac{\partial}{\partial \beta_s}\left[\frac{\partial}{\partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)\right]$

$$\begin{aligned} &= -\sum_{i=1}^{n} x_{is} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial\kappa}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} + (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa) \left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial\beta_s\partial\kappa}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} - \frac{\frac{\partial}{\partial\beta_r}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)\frac{\partial}{\partial\beta_s}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\left[\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)\right]^2} \right] \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} x_{is} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial\kappa}\Gamma(1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} + (1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa \left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial\beta_s\partial\kappa}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}{\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)} - \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \frac{\frac{\partial}{\partial\beta_r}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)\frac{\partial}{\partial\beta_s}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}{\left[\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)\right]^2} \right] \right] + \sum_{i=1}^{n} x_{is} \ln y_i - \sum_{i=1}^{n} x_{is} \ln(1-y_i) \end{aligned}$$

3) Untuk $\frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = \frac{\partial}{\partial \kappa}\left[\frac{\partial}{\partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)\right]$

$$\begin{aligned} &= n\left[\frac{\Gamma''(\kappa)}{\Gamma(\kappa)} - \left(\frac{\Gamma'(\kappa)}{\Gamma(\kappa)}\right)^2\right] - \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})^2 \left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial\kappa^2}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\frac{\partial}{\partial\kappa}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} \right)^2 \right] - \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})^2 \left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial\kappa^2}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}{\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)} - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\frac{\partial}{\partial\kappa}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}{\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Diketahui bahwa $\psi(u) = \frac{d}{du} \ln \Gamma(u) = \frac{\frac{\partial}{\partial u}\Gamma(u)}{\Gamma(u)}$ adalah fungsi digamma, dan $\psi'(u) = \frac{d}{du}\psi(u)$ adalah fungsi trigamma. Misalkan $u = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa$ dan $v = (1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa$, maka :

a) Untuk $\frac{\frac{\partial}{\partial \beta_q}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} = \psi(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)\,(x_{iq}\kappa)$

b) Untuk $\frac{\frac{\partial}{\partial \kappa}\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)}{\Gamma(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)} = \psi(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)\,(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})$

c) Untuk $\frac{\frac{\partial}{\partial \beta_q}\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)}{\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)} = \psi\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)\,(-x_{iq}\kappa)$

Sehingga untuk persamaan (18) dan persamaan (19) masing-masing dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial \beta_q} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \psi(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)\left(x_{iq}\right)^2 - \kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \psi\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)\left(x_{iq}\right)^2$$
$$+\kappa \sum_{i=1}^{n} x_{iq} \ln y_i - \kappa \sum_{i=1}^{n} x_{iq} \ln(1-y_i) = 0$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = 0$$

$$\Leftrightarrow n\,\psi(\kappa) - \sum_{i=1}^{n} \psi(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \psi\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)\left(1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\right)^2$$
$$+\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \ln y_i + \sum_{i=1}^{n} (1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \ln(1-y_i) = 0$$

Dengan demikian, elemen-elemen matriks Hessian yang baru dapat ditulis sebagai berikut :

a) Untuk $\frac{\partial^2}{\partial \beta_s \partial \beta_r} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = \frac{\partial}{\partial \beta_s}\left[\frac{\partial}{\partial \beta_r} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)\right]$

$$= -(\kappa^3) \sum_{i=1}^{n} \psi'\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa\right)(x_{is})(x_{ir})^2 - (\kappa^3) \sum_{i=1}^{n} \psi'\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)(-x_{is})(x_{ir})^2$$

Perlu diperhatikan bahwa $\frac{\partial^2}{\partial \beta_s \partial \beta_r} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) \neq \frac{\partial^2}{\partial \beta_r \partial \beta_s} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)$.

b) Untuk $\frac{\partial^2}{\partial \beta_s \partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = \frac{\partial}{\partial \beta_s}\left[\frac{\partial}{\partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)\right]$

$$= -\sum_{i=1}^{n} [\psi'(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)(x_{is})(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})^2 + \psi(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa) 2(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})(x_{is})] - \sum_{i=1}^{n} \left[\psi'\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)(-x_{is})(1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})^2 + \psi\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right) 2(1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})(-x_{is})\right] + \sum_{i=1}^{n} (x_{is}) \ln y_i - \sum_{i=1}^{n} (x_{is}) \ln(1-y_i)$$

Perlu diperhatikan bahwa $\frac{\partial^2}{\partial \beta_s \partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) \neq \frac{\partial^2}{\partial \kappa \partial \beta_s} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)$.

c) Untuk $\frac{\partial^2}{(\partial \kappa)^2} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa) = \frac{\partial}{\partial \kappa}\left[\frac{\partial}{\partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)\right]$

$$= n\,\psi'(\kappa) - \sum_{i=1}^{n} \psi'(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})^3$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \psi'((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa)\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\right)^3$$

Jadi, rumus umum Metode Newton Raphson untuk kasus model regresi beta adalah

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0^{(i+1)} \\ \hat{\beta}_1^{(i+1)} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_q^{(i+1)} \\ \hat{\kappa}^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0^{(i)} \\ \hat{\beta}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_q^{(i)} \\ \hat{\kappa}^{(i)} \end{pmatrix} - H^{-1}_{\ln L(\boldsymbol{x}_{(i)})} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_0} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)^{(i)} \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)^{(i)} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_q} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)^{(i)} \\ \frac{\partial}{\partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)^{(i)} \end{pmatrix}$$

dimana $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_0} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)^{(i)} \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)^{(i)} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_q} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)^{(i)} \\ \frac{\partial}{\partial \kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \kappa)^{(i)} \end{pmatrix}$ adalah sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} \left(-\kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \psi(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)(x_{i0})^2 - \kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \psi\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)(x_{i0})^2 + (\kappa x_{i0}) \sum_{i=1}^{n} \ln y_i - (\kappa x_{i0}) \sum_{i=1}^{n} \ln(1-y_i)\right)^{(i)} \\ \left(-\kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \psi(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)(x_{i1})^2 - \kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \psi\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)(x_{i1})^2 + (\kappa x_{i1}) \sum_{i=1}^{n} \ln y_i - (\kappa x_{i1}) \sum_{i=1}^{n} \ln(1-y_i)\right)^{(i)} \\ \vdots \\ \left(-\kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \psi(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)\left(x_{iq}\right)^2 - \kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \psi\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)\left(x_{iq}\right)^2 + \left(\kappa x_{iq}\right) \sum_{i=1}^{n} \ln y_i - \left(\kappa x_{iq}\right) \sum_{i=1}^{n} \ln(1-y_i)\right)^{(i)} \\ \left(n\,\psi(\kappa) - \sum_{i=1}^{n} \psi(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})^2 - \sum_{i=1}^{n} \psi\left((1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)(1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})^2 + (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \sum_{i=1}^{n} \ln y_i + (1-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \sum_{i=1}^{n} \ln(1-y_i)\right)^{(i)} \end{pmatrix}$$

3.3 Aplikasi pada Data

Dalam penelitian ini akan dihitung estimasi parameter untuk model regresi beta menggunakan metode maksimum likelihood pada data pengaruh nilai IKK (Indeks Kemahalan Konstruksi) terhadap nilai IPM (Indeks Pembangunan Manusia) Kabupaten/Kota di Indonesia pada tahun 2020.

Data yang diamati terdiri atas nilai IKK sebagai variabel bebas (X) dan proporsi Kabupaten/Kota dengan nilai IPM $\leq$ 68% sebagai variabel respon (Y). Data ini diambil dari situs *website* resmi Badan Pusat Statistik (BPS) Indonesia tahun 2020.

3.3.1 Pendeskripsian Data

Dalam penelitian ini variabel respon berupa banyaknya Kabupaten/Kota dengan IPM $\leq$ 68% dengan nilai IKK tertentu terhadap jumlah Kabupaten/Kota keseluruhan yang diamati. Data proporsi Kabupaten/Kota yang memiliki IPM $\leq$ 68% menurut nilai IKK dapat dilihat pada (Lampiran):

Pada tabel tersebut berisi nilai IKK (X), banyaknya Kabupaten/Kota berdasarkan sampel yang diamati yaitu 497 (n_i), banyaknya Kabupaten/Kota yang memiliki nilai IPM $\leq 68\%$ tahun 2020 (m_i), serta proporsi Kabupaten/Kota yang memiliki nilai IPM $\leq 68\%$ tahun 2020 $(Y = p_i = m_i/n_i)$.

3.3.2 Metode Newton Raphson pada Data IPM dan IKK

Diasumsikan model yang digunakan adalah persamaan regresi yang diambil dari beberapa model berikut

1) $g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$
2) $g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 {x_i}^2$
3) $g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 {x_i}^2 + \beta_3 {x_i}^3$
4) $g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 {x_i}^2 + \beta_3 {x_i}^3 + \beta_4 {x_i}^4$
5) $g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 {x_i}^2 + \beta_3 {x_i}^3 + \beta_4 {x_i}^4 + \beta_5 {x_i}^5$
6) $g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 {x_i}^2 + \beta_3 {x_i}^3 + \beta_4 {x_i}^4 + \beta_5 {x_i}^5 + \beta_6 {x_i}^6$

Didapatkan model dengan nilai *AIC* terbaik yaitu :

$$g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 {x_i}^2 + \beta_3 {x_i}^3 + \beta_4 {x_i}^4 + \beta_5 {x_i}^5$$

Rumus metode Newton-Raphson yang digunakan untuk kasus ini adalah sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} {\hat\beta_0}^{(i+1)} \\ {\hat\beta_1}^{(i+1)} \\ {\hat\beta_2}^{(i+1)} \\ {\hat\beta_3}^{(i+1)} \\ {\hat\beta_4}^{(i+1)} \\ {\hat\beta_5}^{(i+1)} \\ \hat\kappa^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\hat\beta_0}^{(i)} \\ {\hat\beta_1}^{(i)} \\ {\hat\beta_2}^{(i)} \\ {\hat\beta_3}^{(i)} \\ {\hat\beta_4}^{(i)} \\ {\hat\beta_5}^{(i)} \\ \hat\kappa^{(i)} \end{pmatrix} - H^{-1}_{\ln L(\boldsymbol{x}_{(i)})} \begin{pmatrix} \begin{matrix} -\kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \psi(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)(x_{i0})^2 - \kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \psi\left((1 - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)(x_{i0})^2 \\ +(\kappa x_{i0}) \sum_{i=1}^{n} \ln y_i - (\kappa x_{i0}) \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - y_i) \end{matrix}^{(i)} \\ \vdots \\ \begin{matrix} -\kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \psi(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)({x_i}^5)^2 - \kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \psi\left((1 - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)({x_i}^5)^2 \\ +(\kappa {x_i}^5) \sum_{i=1}^{n} \ln y_i - (\kappa {x_i}^5) \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - y_i) \end{matrix}^{(i)} \\ \begin{matrix} n\,\psi(\kappa) - \sum_{i=1}^{n} \psi(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\kappa)(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})^2 - \sum_{i=1}^{n} \psi\left((1 - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})\kappa\right)(1 - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})^2 \\ +(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \sum_{i=1}^{n} \ln y_i + (1 - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - y_i) \end{matrix}^{(i)} \end{pmatrix}$$

dimana $\boldsymbol{x}_{(i)} = \left({\hat\beta_0}^{(i)}, {\hat\beta_1}^{(i)}, {\hat\beta_2}^{(i)}, {\hat\beta_3}^{(i)}, {\hat\beta_4}^{(i)}, {\hat\beta_5}^{(i)}, \hat\kappa^{(i)}\right)$, dan

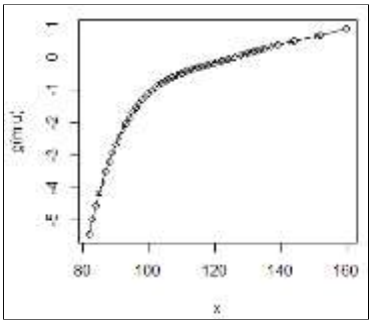
$$H_{\ln L(\boldsymbol{x}_{(i)})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{(\partial\beta_0)^2} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial^2}{\partial\beta_0 \partial\beta_1} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial\beta_0 \partial\beta_5} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial^2}{\partial\beta_0 \partial\kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) \\ \frac{\partial^2}{\partial\beta_1 \partial\beta_0} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial^2}{(\partial\beta_1)^2} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial\beta_1 \partial\beta_5} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial^2}{\partial\beta_1 \partial\kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial\beta_1 \partial\beta_5} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial^2}{\partial\beta_0 \partial\beta_5} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \cdots & \frac{\partial^2}{(\partial\beta_5)^2} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial^2}{\partial\beta_5 \partial\kappa} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) \\ \frac{\partial^2}{\partial\kappa \partial\beta_0} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial^2}{\partial\kappa \partial\beta_1} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial\kappa \partial\beta_5} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) & \frac{\partial^2}{(\partial\kappa)^2} \ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) \end{pmatrix}$$

Turunan pertama dari fungsi log *likelihood* merupakan persamaan yang berbentuk implisit atau berbentuk non-linear, maka untuk menyelesaikan persamaan tersebut diperlukan metode iterasi Newton-Rapson. Metode iterasi Newton-Raphson dapat diselesaikan dengan aplikasi R. Berikut adalah hasil nilai estimasi parameter dengan bantuan aplikasi R 4.1.1:

$$\begin{pmatrix} \hat\beta_0 \\ \hat\beta_1 \\ \hat\beta_2 \\ \hat\beta_3 \\ \hat\beta_4 \\ \hat\beta_5 \\ \hat\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}909e+02 \\ 2{,}232e+01 \\ -3{,}374e-01 \\ 2{,}545e-03 \\ -9{,}564e-06 \\ 1{,}432e-08 \\ 7790 \end{pmatrix}$$

perhitungan berhenti pada iterasi ke-45.

Gambar 3.1 menunjukkan *scatterplot* untuk hasil estimasi metode Newton-Raphson model regresi beta pada persamaan $\widehat{g(\mu_i)} = \hat\beta_0 + \hat\beta_1 x_i + \hat\beta_2 {x_i}^2 + \hat\beta_3 {x_i}^3 + \hat\beta_4 {x_i}^4 + \hat\beta_5 {x_i}^5$ yaitu sebagai berikut :



Gambar 3.1 Hasil Plot IKK terhadap $\widehat{g(\mu_i)}$

Dari Gambar 3.1 dapat dilihat bahwa sumbu x adalah nilai IKK sedangkan untuk sumbu y menunjukkan $\widehat{g(\mu_i)}$. Semakin besar nilai IKK Kabupaten/Kota dengan IPM $\leq 68\%$, nilai $\widehat{g(\mu_i)}$ juga semakin meningkat.

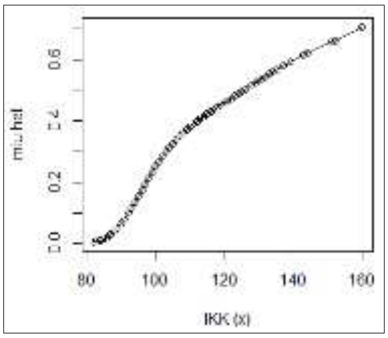
Selanjutnya, akan dilihat bagaimana hubungan antara $\hat\mu_i$ dengan IKK yaitu sebagai berikut :

$$\widehat{g(\mu_i)} = \ln\left(\widehat{\frac{\mu_i}{1-\mu_i}}\right) = \ln\left(\frac{\hat\mu_i}{1-\hat\mu_i}\right) = \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\hat\mu_i = \frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}})}{1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}})} = \frac{\exp\left(\hat\beta_0 + \hat\beta_1 x_i + \hat\beta_2 x_i^2 + \hat\beta_3 x_i^3 + \hat\beta_4 x_i^4 + \hat\beta_5 x_i^5\right)}{1 + \exp\left(\hat\beta_0 + \hat\beta_1 x_i + \hat\beta_2 x_i^2 + \hat\beta_3 x_i^3 + \hat\beta_4 x_i^4 + \hat\beta_5 x_i^5\right)}$$

$$\hat\mu_i = \frac{\exp\left(-590{,}9 + 22{,}32x_i - 0{,}3374x_i^2 + 0{,}002545x_i^3 - 0{,}000009564x_i^4 + 0{,}00000001432x_i^5\right)}{1 + \exp\left(-590{,}9 + 22{,}32x_i - 0{,}3374x_i^2 + 0{,}002545x_i^3 - 0{,}000009564x_i^4 + 0{,}00000001432x_i^5\right)}$$

Dengan memasukkan nilai IKK pada variabel bebas X, maka akan didapat hasil *plot* antara nilai IKK terhadap $\hat{\mu}_i$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.2 berikut :



Gambar 3.2 Hasil Plot IKK terhadap $\hat{\mu}_i$

Pada Gambar 3.2 di atas, dapat dilihat bahwa semakin besar nilai IKK maka semakin besar nilai $\hat{\mu}_i$. Yang artinya, semakin besar atau tinggi nilai IKK Kabupaten/Kota maka proporsi Kabupaten/Kota dengan IPM $\leq 68\%$ juga akan semakin banyak.

3.4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis yang telah dipaparkan, maka kesimpulan yang dapat diambil adalah:

1) Estimasi terhadap parameter untuk model regresi beta dilakukan dengan menggunakan metode maksimum *likelihood*. Fungsi log *likelihood* untuk model regresi beta adalah sebagai berikut :

$$\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa) = n\ln\Gamma(\kappa) - \sum_{i=1}^{n}\ln\Gamma(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\kappa) - \sum_{i=1}^{n}\ln\Gamma\left((1-\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta})\kappa\right) + \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\kappa - 1)\ln y_i + \sum_{i=1}^{n}\left((1-\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta})\kappa - 1\right)\ln(1-y_i)$$

kemudian diestimasi dengan mendeferensialkan persamaan tersebut dengan parameter yang mengikutinya yaitu $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ dan κ. Dalam kasus tersebut $\frac{\partial}{\partial\beta_0}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa)$, $\frac{\partial}{\partial\beta_1}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa)$, $\frac{\partial}{\partial\beta_2}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa)$, ... ,$\frac{\partial}{\partial\beta_q}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa)$ dan $\frac{\partial}{\partial\kappa}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa)$ tidak bisa diselesaikan secara analitik sebab bukan merupakan fungsi yang linear. Pada penelitian ini nilai penduga parameter dari $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_q)$ dan $\hat{\kappa}$ dihitung dengan pendekatan numerik menggunakan metode *Newton-Raphson* yaitu sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0^{(i+1)} \\ \hat{\beta}_1^{(i+1)} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_q^{(i+1)} \\ \hat{\kappa}^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0^{(i)} \\ \hat{\beta}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_q^{(i)} \\ \hat{\kappa}^{(i)} \end{pmatrix} - H^{-1}_{\ln L(x_{(i)})} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\beta_0}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa)^{(i)} \\ \frac{\partial}{\partial\beta_1}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa)^{(i)} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\beta_q}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa)^{(i)} \\ \frac{\partial}{\partial\kappa}\ln L(\boldsymbol{\beta},\kappa)^{(i)} \end{pmatrix}$$

dimana $\boldsymbol{x}_{(i)} = \left(\hat{\beta}_0^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)}, \dots, \hat{\beta}_q^{(i)}, \hat{\kappa}^{(i)}\right)$.

2) Penerapan estimasi maksimum *likelihood* untuk parameter untuk model regresi beta pada data pengaruh nilai IKK tehadap nilai IPM Kabupaten/Kota di Indonesia tahun 2020, pertama-tama dicari terlebih dahulu model terbaik menggunakan AIC (*Akaike Information Criterion*). Didapatkanlah hasil bahwa $g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \beta_4 x_i^4 + \beta_5 x_i^5$ adalah model terbaik. Estimasi parameter untuk persamaan $\widehat{g(\mu_i)} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\beta}_2 x_i^2 + \hat{\beta}_3 x_i^3 + \hat{\beta}_4 x_i^4 + \hat{\beta}_5 x_i^5$ menggunakan metode Newton-Raphson menghasilkan :

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_4 \\ \hat{\beta}_5 \\ \hat{\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}909e+02 \\ 2{,}232e+01 \\ -3{,}374e-01 \\ 2{,}545e-03 \\ -9{,}564e-06 \\ 1{,}432e-08 \\ 7790 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, perlu diketahui bagaimana hubungan antara $\hat{\mu}$ yang merupakan $\widehat{E(Y)}$ atau nilai rata-rata dengan variabel bebas X.

$$\hat{\mu}_i = \frac{\exp\left(-590{,}9 + 22{,}32x_i - 0{,}3374x_i^2 + 0{,}002545x_i^3 - 0{,}000009564x_i^4 + 0{,}00000001432x_i^5\right)}{1 + \exp\left(-590{,}9 + 22{,}32x_i - 0{,}3374x_i^2 + 0{,}002545x_i^3 - 0{,}000009564x_i^4 + 0{,}00000001432x_i^5\right)}$$

Pada persamaan tersebut, semakin besar nilai yang diberikan untuk variabel bebas X maka semakin besar pula $\hat{\mu}_i$. Yang artinya, semakin besar atau tinggi nilai IKK Kabupaten/Kota maka proporsi Kabupaten/Kota dengan IPM $\leq 68\%$ semakin banyak.

Ucapan Terimakasi.

Penulis menyampaikan rasa terimaksih yang setulus-tulusnya kepada dosen pembimbing yang telah dengan segala kesabrannya membimbing penulis hingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan sebaik-baiknya.

LAMPIRAN

No.	Nilai IKK (X_i)	$\sum$ Kab./Kota (n_i)	$\sum$ Kab./Kota dengan nilai IPM ≤ 68% (m_i)	Proporsi (Y_i)
1	82	497	1	0,002
2	83	497	3	0,006
3	84	497	4	0,008
4	85	497	6	0,012
5	86	497	11	0,022
6	87	497	13	0,026
7	88	497	17	0,034
8	89	497	22	0,044
9	90	497	24	0,048
10	91	497	36	0,072
11	92	497	41	0,082
12	93	497	50	0,101
13	94	497	60	0,121
14	95	497	64	0,129
15	96	497	69	0,139
16	97	497	76	0,153
17	98	497	86	0,173
18	99	497	93	0,187
19	100	497	98	0,197
20	101	497	105	0,211
21	102	497	117	0,235
22	103	497	120	0,241
23	104	497	124	0,249
24	105	497	127	0,256
25	106	497	133	0,268
26	107	497	138	0,278
27	108	497	142	0,286
28	109	497	146	0,294
29	110	497	149	0,300
30	111	497	151	0,304
31	112	497	152	0,306
32	113	497	153	0,308
33	114	497	160	0,322
34	115	497	163	0,328
35	116	497	164	0,330
36	117	497	165	0,332
37	118	497	166	0,334
38	119	497	168	0,338
39	120	497	169	0,340
40	121	497	169	0,340
41	122	497	169	0,340
42	123	497	172	0,346
43	124	497	173	0,348
44	125	497	174	0,350
45	126	497	175	0,352
46	128	497	177	0,356
47	129	497	180	0,362
48	130	497	181	0,364
49	131	497	186	0,374
50	132	497	187	0,376
51	133	497	189	0,380
52	134	497	190	0,382
53	135	497	191	0,384
54	137	497	191	0,384
55	139	497	193	0,388
56	143	497	195	0,392
57	144	497	196	0,394
58	151	497	196	0,394
59	152	497	197	0,396
60	160	497	198	0,398

DAFTAR PUSTAKA

F. Cribari-Neto dan K.L. Vasconcellos (2002). Nearly Unbiased Maximum Likelihood Estimation for The Beta Distribution. *J. Statist. Comput. Simul.* , pp. 107-118.

I. Gunawan (2017). *Pengantar Statistika Inferensial*. Jakarta: Rajawali Pers.

N. Hajarisman, (2012). Penaksiran Parameter Model Regresi Beta untuk Memodelkan Data Proporsi. *Statistika* , pp. 9-18.

J. Harlan, (2018). *Analisis Regresi Linier*. Depok: Gunadarma.

A.I. Khuri, (2003). *Advanced Calculus With Applications in Statistics, Second*

Edition. Canada: John Wiley and Sons, Inc.

A.M. Mood, F.A. Graybill dan D.C. Boes, (1986). *Introduction to The Theory of Statistic.* Los Angeles, California: McGraw Hill.

I. Muda, S. Helmi dan A. Kholis, (2014). Kajian Pengaruh Indeks Kemahalan Konstruksi (IKK), Pertumbuhan Ekonomi dan Alokasi Belanja Modal terhadap Indeks Pembangunan Manusia (IPM) di Sumatera Utara. *Jurnal Dinamika Akuntansi dan Bisnis* , pp. 12-29.

H.J. Ramdhani dan Idris (2019). Pengaruh Kemahalan Konstruksi, Kemandirian Fiskal dan Pertumbuhan Ekonomi terhadap Pembangunan Manusia di Sumatera Barat. *Jurnal Kajian Ekonomi dan Pembangunan* , pp. 301-308.

F. Ridiani (2013). Pendugaan Parameter Distirbusi Beta dengan Metode Momen dan Metode Maksimum Likelihood. *Jurnal Matematika UNAND* , pp. 23-28.

L. Waserman (2003). *All of Statistics A Concise Course in Statistical Inference.* Pittsburgh: Springer.

F. Yudiaatmaja (2013). *Analisis Regresi dengan Menggunakan Aplikasi Komputer Statistik SPSS.* Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

G.O. Yusuf, A.K. Jaya dan N. Ilyas (2016). Pemodelan Regresi Ligostik Biner menggunakan Metode Momen Diperumum. *Jurnal Informatika Mulawarman* , pp. 37-42.