ANALISIS SISTEM ANTRIAN MULTI CHANNEL SINGLE PHASE SERVICE PADA STASIUN PENGISIAN BAHAN BAKAR UMUM (SPBU) PASARWAJO

Dewi Sartika Jamil
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Halu Oleo, Indonesia
sartika.dewijamil1212@gmail.com

Asrul Sani[1], Muh. Kabil Djafar[2], Jufra[3] dan Herdi Budiman[4]
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Halu Oleo, Indonesia
[1]saniasrul1969@gmail.com ,[2]kabildjafar@gmail.com , [3]jufra@uho.ac.id , [4]herdi.budiman@uho.ac.id

ABSTRAK

Antrian dapat ditemui pada beberapa fasilitas pelayanan umum di mana masyarakat atau barang akan mengalami proses antrian dari kedatangan, memasuki antrian, menunggu, hingga proses pelayanan berlangsung. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data yang diperoleh langsung dari hasil pengamatan di lapangan pada SPBU Pasarwajo. Pengamatan ini dilakukan dari tanggal 25 Juli 2022 sampai 31 Juli 2022 selama 8 jam disetiap harinya, yaitu pukul 09:00-17:00 WITA. Data yang diambil pada penelitian ini berupa data waktu kedatangan dan waktu pelayanan yang hanya berlaku untuk kendaraan roda dua saja. Dalam penelitian ini dipilih program Matlab untuk membuat simulasi perhitungan pada sistem antrian. Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa sistem antrian SPBU Pasarwajo mengikuti model (M/M/2):(FCFS/100/~) dengan rata-rata kedatangan 2.7935 dan rata-rata waktu pelayanan 2.7458, peluang masa sibuk 0.5087, rata-rata pelanggan yang menunggu dalam antrian 0.0726, rata-rata waktu yang dihabiskan dalam antrian 0.1048, rata-rata pelanggan yang menunggu dalam sistem 0.1078, dan rata-rata waktu yang dihabiskan dalam sistem 0.4889. Sistem antrian yang diterapkan sudah efektif karena telah mencapai kondisi *Steady-state* dengan persentase pelayan sibuk sebesar 50.87%.

Kata Kunci: Sistem antrian, FCFS, Multi Channel, Single Phase, SPBU, Matlab

ABSTRACT

Queues can be found at several public service facilities where the public or goods will experience a queuing process from arrival, entering the queue, waiting, until the service process takes place. The data used in this study is data obtained directly from the result of research at Pasarwajo gas stations. This observations was carried out from July 25,2022 to July 31, 2022 for 8 hours each day, ie at 09:00-17:00 WITA. In this study, the Matlab program was chosen to make calculation simulations on the queuing system. Based on the results of research and discussion, it can be concluded that the Pasarwajo gas station queuing system follows the (M/M/2):(FCFS/100/~) model with an average arrival 2.7935 and an average service time 2.7458, pquang busy period 0.5087, the average customer waiting in the queue 0.0726, the average time spent in the queue 0.1048, the average customer waiting in the system 0.1078, and average time spent in the system 0.4889. The queue system applied is effective because it has reached the Steady-state condition with a busy server percentage of 50.87%.

Keywords: Queuing system, FCFS, Multi Channel, Single Phase, SPBU, Matlab

1. Pendahuluan

Seperti yang kita ketahui, antrian merupakan suatu fenomena yang lumrah dan tak asing lagi bagi masyarakat, baik di negara maju maupun negara berkembang entah itu luar negeri atau bahkan Indonesia. Seiring berkembangnya teknologi dan kebutuhan manusia yang semakin meningkat, antrian tidak hanya terjadi di depan toilet umum saja, tetapi juga di tempat-tempat yang ramai dikunjungi orang seperti supermarket, restoran, lampu merah, rumah sakit, bank, SPBU, dan diberbagai perusahaan jasa lainnya.

Menunggu adalah suatu peristiwa yang sangat umum terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Setiap lapisan masyarakat pasti pernah mengalami peristiwa ini. Menunggu biasa terjadi jika kebutuhan akan suatu pelayanan melebihi pelayan yang tersedia. Hal ini dapat dilihat apabila terjadi baris tunggu pelanggan terhadap suatu pelayanan dikarenakan pelayan tersebut sedang melayani pelanggan lainnya sehingga tidak dapat melayani lebih dari satu pelanggan pada saat yang bersamaan [1] .

SPBU Pasarwajo merupakan SPBU pertama di Kecamatan Pasarwajo Kabupaten Buton Provinsi Sulawesi Tenggara dengan luas 500 m x 400 m.

Dalam satu kali pengisian 8.000 liter BBM bisa habis dalam sehari. Oleh karena itu, antrian merupakan hal yang wajar bagi masyarakat sebab selalu terjadi disetiap harinya, dari pagi hingga malam hari. Karena tidak adanya SPBU lain di daerah tersebut, akibatnya para pengguna kendaraan bermotor harus rela antri berjam-jam guna memperoleh bahan bakar untuk memenuhi kebutuhan sehari-hari terutama bagi para pengendara yang berasal dari tempat yang jauh dari SPBU tersebut. Namun, tak jarang ada beberapa pengendara yang memutuskan untuk pulang atau keluar dari antrian dan memilih untuk mengisi BBM melalui pedagang enceran yang ada disekitaran SPBU. Ketika stok bahan bakar di SPBU habis atau sedang melakukan pengisian stok, para pengendara masih tetap mengantri di luar SPBU bahkan ada beberapa kendaraan yang dibiarkan terparkir di dalam antrian hingga berjam-jam tanpa pengemudi. Hal ini disebabkan para pengemudi yang tidak ingin disalip oleh pengendara lain dan berada jauh hingga ke antrian terakhir.

Penelitian ini ditulis dengan susunan sebagai berikut.

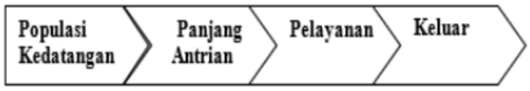
1) Pendahuluan
2) Tinjauan pustaka
   a. Teori antrian
   b. Faktor-faktor sistem antrian
   c. Notasi sistem antrian
   d. Struktur antrian
   e. Distribusi Poisson
   f. Distribusi eksponensial
   g. Ukuran *steady-state*
   h. Model antrian (M/M/c) : (GD/∞/∞)
   i. Model antrian (G/G/c) : (FCFS/∞/∞)
   j. Model antrian (M/M/c) : (FCFS/N/∞)
3) Metode penelitian
4) Hasil dan pembahasan
   a. Pengumpulan data
   b. Uji kecocokan distribusi banyak kedatangan
   c. Uji distribusi eksponensial
   d. Pengujian *steady-state*
   e. Model antrian SPBU Pasarwajo
   f. Analisis perhitungan model antrian
5) Kesimpulan dan saran

Pada bagian dua terdapat tinjuan pustaka yang membahas tentang teori-teori sistem antrian yang mendukung dalam penelitian ini, seperti definisi dan teorema sistem antrian serta beberapa model antrian *multi channel single phase*. Selanjutnya pada bagian tiga membahas tentang waktu dan tempat penelitian serta metode yang digunakan dalam penelitian ini. Kemudian pada bagian empat membahas tentang hasil penelitian yang dilakukan berdasarkan prosedur yang ada pada bagian tiga. Paper ini ditutup dengan kesimpulan dan saran pada bagian lima.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Teori Antrian

Sistem antrian meliputi kedatangan suatu pelanggan untuk memperoleh pelayanan, menunggu untuk dilayani apabila fasilitas pelayanan (server) masih sibuk dan kemudian mendapatkan pelayanan serta meninggalkan sistem setelah dilayani [2].



Gambar 1. Komponen sistem antrian

2.2 Faktor-Faktor Sistem Antrian

a) Pola kedatangan

Pola kedatangan mendeskripsikan tentang bagaimana distribusi pelanggan memasuki sistem. Distribusi kedatangan terdiri atas dua, yaitu *constant arrival distribution* yaitu pelanggan yang datang setiap periode tertentu dan *arrival pattern random* yaitu pelanggan yang datang secara acak [3].

Misalkan P_n adalah probabilitas dengan n kedatangan. Maka pola kedatangan konstan dapat dikatakan $n = (0,1,2,3,..)$ dan $n = (0,3,5,9,..)$ untuk pola kedatangan secara acak.

b) Pola pelayanan

Pola pelayanan hampir sama dengan pola kedatangan. Pola ini juga bisa konstan maupun acak. Jika waktu pelayanan konstan maka waktu yang diperlukan untuk melayani setiap pelanggan sama. Sedangkan waktu pelayanan acak merupakan waktu untuk melayani setiap pelanggan tidak sama atau acak [3]

c) Fasilitas pelayanan

Fasilitas pelayanan berkaitan dengan baris antrian yang akan dibentuk. Terdapat tiga bentuk desain fasilitas pelayanan yaitu bentuk series, bentuk parallel dan bentuk *network station*.

d) Disiplin antrian

Ada berbagai macam sistem antrian, diantaranya: [4]

1) *First Come First Served* (FCFS) atau *First In First Out* (FIFO
2) *Last Come First Served (LCFS)* atau *Last In First Out (LIFO)*
3) *Shortest Operation Times (SOT)*
4) *Service In Random Order (SIRO*
5) *Priority Service (PS)*

e) Kapasitas sistem

Kapasitas sistem merupakan jumlah maksimum pelanggan, baik pelanggan yang sedang dilayani maupun pelanggan yang berada dalam antrian, yang dapat ditampung oleh fasilitas pelayanan di waktu yang bersamaan. Sebuah sistem yang tidak membatasi jumlah pelanggan di dalam fasilitas pelayanannya dikatakan memiliki kapasitas tak terhingga (*infinite*), sedangkan suatu sistem yang membatasi jumlah pelanggan yang ada dalam suatu fasilitas pelayanannya dikatakan memiliki kapasitas yang terbatas atau *finite* [5].

f) Sumber pemanggilan

Dalam fasilitas pelayanan, yang berperan sebagai sumber pemanggilan dapat berupa mesin atau manusia. Jika ada mesin yang rusak maka sumber pemanggilan akan berkurang dan tidak dapat melayani pelanggan. Ada dua macam sumber panggilan yaitu sumber panggilan terbatas (*finite calling source*) dan sumber panggilan tak terbatas (*infinite calling source*) [6].

2.3 Notasi Sistem Antrian

Secara umum notasi yang telah dibakukan [7] adalah sebagai berikut:

[a/b/c] : [d/e/f]

Keterangan:
a : Distribusi kedatangan
b : Distribusi pelayanan
c : Jumlah pelayan yang ada
d : Disiplin antrian
e : Kapasitas sistem
f : Sumber pemanggilan

Tabel 1. Simbol-simbol pengganti notasi a sampai f pada notasi Kendall-Lee

Notasi	Simbol	Keterangan
a dan b	M	Markov, kedatangan atau kepergian berdistribusi Poisson (waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial).
	D	Deterministik, waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan konstan atau deterministik.
	E_k	Erlang, waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan berdistribusi Erlang.
	GI	*General Independent*, distribusi independen umum dari kedatangan atau waktu antar kedatangan.
	G	General, distribusi umum dari kepergian atau waktu pelayanan.
d	FCFS/FIFO	*First Come First Served/First In First Out*
	LCFS	*Last Come First Served*
	SIRO	*Service In Random Order*
	GD	*General Discipline*
	NPD	*Non-preemtive discipline*
	PRD	*Preemtive discipline*
c, e **dan** f	$0,1,2,\dots,\infty$	

Notasi-notasi model antrian dasar untuk sumber tak terbatas adalah sebagai berikut: [8]

Tabel 2. Simbol dan rumus antrian

Notasi	Keterangan	Satuan
N	Banyaknya pelanggan dalam sistem	Unit/jam
ρ	Tingkat intensitas fasilitas pelayanan	%
P_0	Probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem	%
P_n	Probabilitas n pelanggan dam sistem	%
λ	Laju kedatangan rata-rata	Unit/jam
$\frac{1}{\lambda}$	Waktu antar kedatangan rata-rata	Jam/unit
μ	Laju pelayanan rata-rata	Unit/jam

$\frac{1}{\mu}$	Waktu pelayanan rata-rata	Jam/unit
n	Banyak pelanggan dalam sistem pada suatu waktu	Unit
L_q	Banyak pelanggan rata-rata dalam antrian	Unit
L_s	Banyak pelanggan rata-rata dalam sistem	Unit
W_q	Waktu rata-rata dalam antrian	Jam
W_s	Waktu rata-rata dalam sistem	Jam
c	Banyaknya fasilitas pelayanan	Unit

2.4 Struktur Antrian

Terdapat empat model struktur antrian dasar yang sering terjadi pada seluruh sistem antrian, antara lain sebagai berikut: [9]

1) Single channel single phase
2) Single channel multi phase
3) Multi channel single phase
4) Milti channel multi phase

2.5 Distribusi Poisson

Definisi 1. Distribusi peluang peubah acak Poisson X yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu dinyatakan dengan t, diberikan oleh:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad , \lambda > 0 \text{ dan } x = 0,1,2,3,\dots \qquad (1)$$

Keterangan:

x : banyaknya kedatangan
$P(x)$: probabilitas kedatangan
λ : rata-rata tingkat kedatangan
e : dasar logaritma natural $= 2{,}71828$
$x!$: $x(x-1)(x-2)\dots 1$ (dibaca x faktorial)

Teorema 1. Rataan dan variansi distribusi Poisson adalah sama yaitu λ, dan MGF distribusi Poisson adalah $e^{\lambda(e^t-1)}$.

Bukti:

Diketahui bahwa MGF suatu distribusi diperoleh dari $E(e^{tX})$.

Sehingga MGF dari distribusi Poisson dapat diperoleh dengan cara berikut :

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{n}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}\sum_{x=0}^{n}\frac{e^{-\lambda e^t}(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} \\ &= e^{\lambda(e^t-1)} \qquad (2) \end{aligned}$$

Rataan distribusi Poisson diperoleh dengan cara menurunkan fungsi MGF dan menetapkan nilai 0 untuk t seperti berikut:

$$\begin{aligned} E(X) &= M'_X(t=0) = \frac{d}{dt}e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} \\ &= \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} = \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)} = \lambda \qquad (3) \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan variansi perlu mencari nilai harapan X^2 atau turunan kedua fungsi MGF terlebih dahulu dan menetapkan nilai 0 untuk t sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(X^2) = M''_X(t=0) &= \frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} \\ &= (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} \\ &= (\lambda e^0)^2 e^{\lambda(e^0-1)} + \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)} \\ &= \lambda^2 + \lambda \qquad (4) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh variansi dari distribusi Poisson sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] \\ &= E[X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2] \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + \left(E(X)\right)^2 \\ &= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda \qquad (5) \end{aligned}$$

Jadi, Teorema 2.1 terbukti.

2.6 Distribusi Eksponensial

Definisi 2. Variabel random kontinu X dikatakan berdistribusi eksponensial dengan parameter λ di mana $\lambda > 0$, jika mempunyai fungsi densitas dalam bentuk

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Teorema 2. Jika kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson maka waktu antar kedatangan pelanggan berdistribusi eksponensial.

Bukti:

Ambil T_1 sebagai waktu antar kedatangan pelanggan ke 0 hingga pelanggan pertama dan T_n sebagai waktu antar kedatangan pelanggan ke $n-1$ hingga pelanggan ke n. Sehingga barisan waktu antar kedatangan adalah barisan $\{T_n\}$ dengan $n = 1,2,3,\dots$

Akan ditunjukkan bahwa jika T_n berdistribusi eksponensial maka kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson.

Jika $t < T_1$ maka jumlah kedatangan pada waktu t adalah nol, sehingga diperoleh

$P_n(T_1 > t) = P\{$tidak ada kedatangan selama waktu $t\}$

$$\begin{aligned} P_n(T_1 \leq t) &= 1 - P_0(t) \\ &= 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0 \qquad (7) \end{aligned}$$

Persamaan (7) merupakan fungsi kumulatif dari distribusi eksponensial, yang secara umum dapat ditulis sebagai berikut.

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Fungsi densitas dari T_1 adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0. \qquad (9)$$

Jadi, terbukti bahwa T_n berdistribusi eksponensial. Karena kejadian-kejadian pada sistem antrian merupakan kejadian saling bebas maka pembuktian di atas juga berlaku untuk setiap $T_n, n \geq 1$.

Teorema 3. Jika kepergian pelanggan berdistribusi Poisson maka waktu pelayanan berdistribusi eksponensial.
Bukti:

Ambil T_1 sebagai waktu pelayanan pelanggan pertama dan untuk $n > 1$, T_n menunjukkan waktu pelayanan pada pelanggan ke n. Sehingga barisan $\{T_n\}$ dengan $n = 1,2,3, \dots$ adalah barisan dari waktu pelayanan.
Akan ditunjukkan bahwa jika T_n berdistribusi eksponensial.
Jika $t < T_1$ maka jumlah pelayanan pada waktu t adalah nol, sehingga diperoleh

$$P_n(T_1 > t) = P\{\text{tidak ada pelayanan selama waktu } t\}$$

$$P_n(T_1 > t) = P_0(t) = e^{-\mu t} \tag{10}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} P_n(T_1 \leq t) &= 1 - P_0(t) \\ &= 1 - e^{-\mu t},\ t \geq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Persamaan (11) merupakan fungsi kumulatif dari distribusi eksponensial, yang secara umum dapat ditulis sebagai berikut.

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & \mathrm{t} \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{12}$$

Fungsi densitas dari T_n adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \mu e^{-\mu t},\ t \geq 0. \tag{13}$$

Jadi, terbukti bahwa T_n berdistribusi eksponensial. Karena kejadian-kejadian pada sistem antrian merupakan kejadian saling bebas maka pembuktian di atas juga berlaku untuk $T_n, \forall n \geq 1.5$.

2.7 Ukuran *Steady-State*

Ukuran *steady state* sistem antrian (ρ) dapat ditentukan dengan rumus :

$$\rho = \frac{\lambda}{c.\mu} \leq 1 \tag{14}$$

Jika $\rho < 1$ yang artinya $\lambda < \mu$, maka kedatangan dan waktu pelayanan sudah mencapai kondisi stabil (*steady state*). Sebaliknya jika $\rho > 1$ maka data yang diperoleh belum *steady state* karena kedatangan terjadi dengan laju yang lebih cepat dari pada laju pelayanan server, sehingga antrian yang tercipta menjadi lebih panjang. Sedangkan jika $\rho = 1$ maka laju kedatangan pelanggan sama dengan laju pelayanan server.

Ukuran keefektifan sistem dalam kondisi *steady state* meliputi ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian (Lq), ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem (Ls), ekspektasi waktu menunggu dalam antrian (Wq) dan ekspektasi waktu menunggu dalam sistem (Ws).

2.8 Model Antrian (M/M/c) : (GD/∞/∞)

Sistem antrian ini merupakan suatu model antrian yang penotasiannya berdasarkan pada notasi Kendall-Lee. Pada model ini, $M_{pertama}$ menyatakan pola kedatangan berdistribusi Poisson dan M_{kedua} menyatakan pola pelayanan berdistribusi eksponensial, c menyatakan jumlah *channel* pelayanan yang menggunakan disiplin antrian FIFO/FCFS, di mana kapasitas sistem dan sumber pemanggilannya tidak terbatas atau tak terhingga.

Definisi 3. Jumlah pelanggan dalam sistem antrian adalah jumlah pelanggan dalam antrian ditambah dengan jumlah pelanggan yang sedang mendapat pelayanan.
Definisi 4. Waktu menunggu dalam sistem antrian adalah jumlah antara waktu menunggu dalam antrian dan waktu pelayanan.
Definisi 5. Laju kedatangan efektif adalah jumlah dari perkalian laju kedatangan pelanggan pada keadaan tertentu dengan probabilitasnya. Laju kedatangan efektif dinotasikan dengan λ_{eff}. Berdasarkan definisi tersebut, laju kedatangan efektif dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \tag{15}$$

Dengan

$$P_0 = \left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}\left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}\right)\right\}^{-1}, \frac{\rho}{c} < 1 \tag{16}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, & 0 < n \leq c \\ \frac{1}{c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, & n \geq c \end{cases} \tag{17}$$

Hubungan antara L_q dan W_q serta L_s dan W_s dinyatakan dalam rumus *Little* sebagai berikut.

$$L_q = \lambda_{eff} W_q \tag{18}$$

$$L_s = \lambda_{eff} W_s \tag{19}$$

Ukuran keefektifan system antrian pada model (M/M/c) : (GD/∞/∞) dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$L_q = \frac{\rho^{c+1} P_0}{(c-1)!(c-\rho)^2}, \text{ dengan } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{20}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \tag{21}$$

$$L_s = L_q + \rho \tag{22}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \tag{23}$$

2.9 Model Antrian (G/G/c) : (FCFS/∞/∞)

Model antrian (G/G/c) merupakan suatu model antrian yang memiliki pola kedatangan berdistribusi umum (general) dan pola pelayanan berdistribusi umum dengan jumlah pelayan c dan menggunakan disiplin antrian FCFS serta kapasitas sistem dan sumber pemanggilannya tidak terbatas.

Ukuran kinerja sistem antrian pada model ini mengikuti ukuran kinerja sistem pada model (M/M/c), terkecuali untuk perhitungan jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian (L_q), antara lain sebagai berikut: [10]

$$L_q = L_{q\ M/M/c} \cdot \frac{\left(\mu^2\left(\frac{1}{\mu^2}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^2\right)}{2} \tag{24}$$

2.10 Model Antrian (M/M/c) : (FCFS/N/∞)

Pada model ini, $M_{pertama}$ menyatakan pola kedatangan berdistribusi Poisson dan M_{kedua} menyatakan pola pelayanan berdistribusi eksponensial, c menyatakan jumlah *channel* pelayanan yang menggunakan disiplin antrian FIFO/FCFS, di mana kapasitas sistemnya terbatas N dan sumber pemanggilannya tidak terbatas. Pelanggan tiba dengan laju rata-rata λ dan dapat melayani maksimum c pelanggan secara bersamaan, dengan laju rata-rata pelayanan μ.

Kapasitas sistem yang terbatas berarti jumlah pelanggan di dalam garis tunggu dibatasi. Jika ruang tunggu dengan kapasitas tertentu itu sudah penuh maka pelanggan tidak masuk. Jika didalam sistem terdapat N pelanggan termasuk pelanggan yang sedang dilayani maka keterbatasan kapasitas sistem tersebut akan mempengaruhi P_0 secara langsung [11].

$$P_0 = \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c\left(1-(\rho/c)\right)^{N-c+1}}{c!\left(1-(\rho/c)\right)}\right]^{-1}, \frac{\rho}{c} \neq 1 \\ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}(N-c+1)\right]^{-1}, \frac{\rho}{c} = 1 \end{cases} \quad (25)$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0,\ 0 < n \leq c \\ \frac{1}{c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0,\ n \geq c \leq N \end{cases} \quad (26)$$

$$L_q = \begin{cases} \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0 \left[1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\frac{\rho}{c}\right)\right], \frac{\rho}{c} \neq 1 \\ \frac{\rho^c(N-c)(N-c+1)}{2c!} P_0, \quad \frac{\rho}{c} = 1 \end{cases} \quad (27)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1-P_N)} \quad (28)$$

$$L_s = L_q \frac{\lambda(1-P_N)}{\mu} \quad (29)$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)} \quad (30)$$

Notasi P_N menyatakan probabilitas ruang tunggu penuh.

$$P_N = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N . P_0 \quad (31)$$

2.11 Uji Distribusi *Chi-square* (X^2)

Uji *Chi-square* (biasa disebut Kai Kuadrat) merupakan salah satu jenis uji komparatif non parametis yang digunakan pada dua variabel, di mana skala data kedua variabel tersebut berbentuk nominal [12]. Uji *Chi-square* dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (32)$$

Keterangan:
X^2 : Distribusi *Chi-square*
O_i : Nilai observasi ke-*i*
E_i : Nilai ekspektasi ke-*i*
k : Banyaknya kategori/sel $(1,2,\ldots,k)$

2.12 Uji distribusi Poisson

Uji kesesuaian Poisson dilakukan dengan menggunakan uji chi-square (X^2) dengan definisi berikut:

H_0 : data yang diuji mengikuti distribusi Poisson

H_1 : data yang diuji tidak mengikuti distribusi Poisson

Menurut [13] Statistik uji $(X^2\ hitung)$ dihitung dengan rumus:

$$X^2\ hitung = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\lambda_i - \lambda)^2}{\lambda} \quad (33)$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{k} \quad (34)$$

keterangan:
λ_i : Tingkat kedatangan rata-rata
λ : Rata-rata tingkat kedatangan
Menentukan $X^2\ tabel\ (\alpha = 0.05)$

$$X^2\ tabel = X^2(1-\alpha)(k-1) \quad (35)$$

Dalam uji *chi square*, pola kedatangan mengikuti distribusi Poisson atau H_0 diterima jika $X^2\ hitung \leq X^2\ tabel$.

2.13 Uji distribusi eksponensial

Sama halnya dengan uji distribusi Poisson, Uji kesesuaian eksponensial juga dilakukan dengan menggunakan uji chi-square (X^2) dengan definisi berikut :

H_0 : data yang diuji mengikuti distribusi eksponensial

H_1 : data yang diuji tidak mengikuti distribusi eksponensial

Menurut [13] Statistik uji $(X^2\ hitung)$ dihitung dengan rumus :

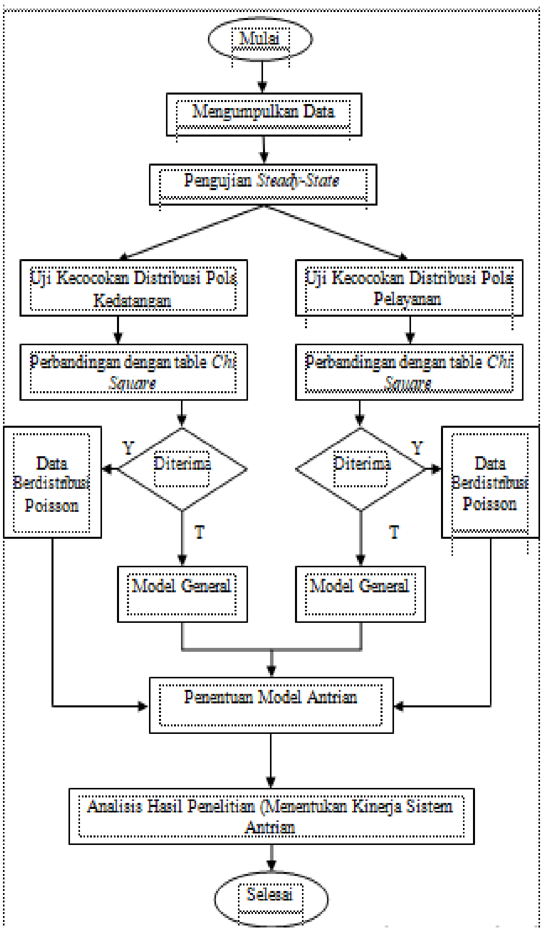
$$X^2\ hitung = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mu_i - \mu_i\ harapan)^2}{\mu_i\ harapan} \quad (36)$$

Nilai harapan dapat dihitung dengan menggunakan rumus pada Persamaan (8) untuk $(t = 1)$.

Pola pelayanan mengikuti distribusi eksponensial atau H_0 diterima jika $X^2\ hitung \leq X^2\ tabel$.

3. Metode Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada bulan Juli 2022 hingga Januari 2022 dengan menggunakan metode penelitian kuantitatif. Sampel yang diamati jumlah kendaraan roda dua yang datang dan melakukan pengisian bahan bakar minyak (*pertalitei*) di SPBU Pasarwajo.



Gambar 2. Flowchart prosedur penelitian

4. Hasil dan Pembahasan

4.1 Pengumpulan Data

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data yang diperoleh langsung dari hasil pengamatan di lapangan pada SPBU Pasarwajo. Pengamatan ini dilakukan pada tanggal 25 Juli 2022 sampai 31 Juli 2022 selama 8 jam disetiap harinya, yaitu pukul 09:00-17:00 WITA.

Berdasarkan asumsi bahwa jika kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson maka waktu pelayanan pelanggan berdistribusi eksponensial, maka akan dilakukan uji distribusi dengan menggunakan uji *Chi-Square*.

4.2 Uji Kecocokan Distribusi Banyak Kedatangan

Banyak kedatangan kendaraan roda dua di SPBU Pasarwajo, diasumsikan berdistribusi Poisson. Oleh karena itu, untuk menguji hal tersebut maka dilakukan uji Kebaikan Suai *Chi-square* dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Hipotesis
   H_0 : kedatangan berdistribusi Poisson
   H_1 : kedatangan tidak berdistribusi Poisson
2. Kriteria yang digunakan :
   Jika $X^2 hitung \leq X^2\ tabel$ maka H_0 diterima
   Jika $X^2 hitung > X^2\ tabel$ maka H_0 ditolak
3. Menentukan nilai $X^2 hitung$

$$X^2\ hitung = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\lambda_i - \lambda)^2}{\lambda}$$

$$= \frac{(3.03958 - 2.793452)^2 + (2.73542 - 2.793452)^2 +}{2.793452}$$
$$\frac{(2.73333 - 2.793452)^2 + (2.975 - 2.793452)^2 +}{2.793452}$$
$$\frac{(2.29375 - 2.793452)^2 + (2.7625 - 2.793452)^2 +}{2.793452}$$
$$\frac{(3.01458 - 2.793452)^2}{2.793452}$$
$$= \frac{0.06058 + 0.003368 + 0.003614 + 0.03296 + 0.249702}{2.793452}$$
$$\frac{0.000958 + 0.048899}{2.793452}$$
$$= \frac{0.400082}{2.793452} = 0.143221$$

4. Menentukan nilai $X^2\ tabel$

$$X^2_{tabel} = X^2_{(1-\alpha)(k-1)} = X^2_{(0.95)(6)} = 1.64$$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh hasil uji *chi-square* banyak kedatangan, bahwa nilai $X^2 hitung = 0.14 < 1.64 = X^2\ tabel$, maka dapat disimpulkan bahwa H_0 diterima dan H_1 ditolak. Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa distribusi probabilitas untuk banyak kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson.

4.3 Uji Kecocokan Distribusi Eksponensial

Untuk menguji distribusi probabilitas waktu pelayanan maka dilakukan Uji Kebaikan Suai *Chi-Square* seperti berikut.

1. Hipotesis
   H_0 : kedatangan berdistribusi eksponensial
   H_1 : kedatangan tidak berdistribusi eksponensial
2. Kriteria yang digunakan :
   Jika $X^2 hitung \leq X^2\ tabel$ maka H_0 diterima
   Jika $X^2 hitung > X^2\ tabel$ maka H_0 ditolak
3. Menentukan nilai $X^2 hitung$

$$X^2\ hitung = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mu_i - \mu_i\ harapan)^2}{\mu_i\ harapan}$$

$$= \frac{(0.3338 - 1.442315)^2 + (0.37267 - 1.444623)^2 +}{10.09683}$$
$$\frac{(0.37354 - 1.444605)^2 + (0.34237 - 1.44336)^2 +}{10.09683}$$
$$\frac{(0.4428 - 1.434362)^2 + (0.36641 - 1.444664)^2 +}{10.09683}$$
$$\frac{(0.33827 - 1.442899)^2}{10.09683}$$
$$= \frac{1.228812 + 1.149081 + 1.147179 + 1.212183 +}{10.09683}$$
$$\frac{0.983187 + 1.162626 + 1.220213}{10.09683}$$
$$= \frac{8.103282}{10.09683}$$
$$= 0.8026$$

4. Menentukan nilai $X^2\ tabel$

$$X^2_{tabel} = X^2_{(1-\alpha)(k-1)} = X^2_{(0.95)(6)} = 1.64$$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh hasil uji *chi-square* waktu pelayanan bahwa nilai $X^2 hitung = 0.80 < 1.64 = X^2\ tabel$, maka dapat disimpulkan bahwa H_0 diterima dan H_1 ditolak.

Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa distribusi probabilitas untuk waktu pelayanan berdistribusi eksponensial.

4.4 Penguajian *Steady State*

Karena model yang digunakan adalah *multi channel single phase* maka data yang diperoleh akan memenuhi kondisi stabil atau *steady state* $\left(\rho = \frac{\lambda}{c.\mu}\right)$ jika $\rho < 1$.

Rata-rata kedatangan

Berdasarkan Tabel 4.1 diperoleh data-data berikut:

$$\lambda = \frac{jumlah\ kedatangan}{lama\ waktu\ pengamatan}$$
$$\lambda = \frac{9386}{3360}$$
$\lambda = 2.7935$ pelanggan per menit

Rata-rata waktu pelayanan

Berdasarkan Tabel 4.2 diperoleh data-data berikut:

$$\mu = \left[\frac{lama\ waktu\ pelayanan}{jumlah\ pelanggan\ yang\ dilayani}\right]^{-1}$$
$$\mu = \left[\frac{3360}{9226}\right]^{-1}$$
$$\mu = \frac{1}{0.36419}$$
$\mu = 2.7458$ pelanggan per menit

Peluang masa sibuk

$$\rho = \frac{\lambda}{c.\mu} = \frac{2.7935}{2\ x\ 2.7458} = 0.5087$$

Berdasarkan pencarian di atas, diperoleh nilai $\lambda = 2.7935$ dan $\mu = 2.7458$. Karena $\rho < 1$ maka laju kedatangan dan waktu pelayanan mencapai kondisi stabil (*steady-state*).

4.5 Model Antrian SPBU Pasarwajo

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari Uji Kebaikan Suai *Chi-Square* banyak kedatangan dan waktu pelayanan yang telah dilakukan, dapat ditentukan model dari suatu sistem antrian. Model sistem antrian di Stasiun Pengisian Bahan-Bakar Umum (SPBU) Pasarwajo mengikuti bentuk *Multi Channel Single Phase* dengan 2 fasilitas pelayanan. Disiplin antrian yang digunakan adalah FCFS, yaitu pelanggan yang datang terlebih dahulu akan dilayani dahulu. Distribusi banyak kedatangan mengikuti distribusi Poisson dan distribusi waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial, dengan kapasitas sistem 100 kendaraan dan sumber pemanggilan yang tak terbatas. Jadi model sistem antrian yang terbentuk di SPBU Pasarwajo adalah model antrian (M/M/2) : (FCFS/100/∞).

4.6 Analisis Perhitungan Model Antrian

Peluang tidak ada pelanggan dalam antrian (P_0)

Diketahui $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2.7935}{2.7458} = 1.0173;\ c = 2; N = 100$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c\left(1-(\rho/c)\right)^{N-c+1}}{c!\left(1-(\rho/c)\right)}\right]^{-1},\frac{\rho}{c} \neq 1$$
$$= \left[\frac{(1.0173)^0}{0!} + \frac{(1.0173)^1}{1!} + \frac{(1.0173)^{97}}{2!\,(1-0.5087)}\right]^{-1}$$
$$= \left[1 + 1.0173 + \frac{5.2791}{2(0.4913)}\right]^{-1}$$
$$= \left[2.01734 + \frac{5.2791}{0.9826}\right]^{-1}$$
$$= \frac{1}{7.3899}$$
$$= 0.1353$$

Ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian (L_q)

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}P_0\left[1-(\rho/c)^{N-c}-(N-c)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\frac{\rho}{c}\right)\right]$$
$$= \frac{(\mathbf{1.0173})^3(\mathbf{0.1353})}{(\mathbf{2}-\mathbf{1})!\,(\mathbf{2}-\mathbf{1.0173})^2}[\mathbf{1}-(\mathbf{0.5087})^{98}-(\mathbf{98})(\mathbf{0.5087})^{98}(\mathbf{1}-\mathbf{0.5087})]$$
$$= \frac{1.0528(0.1353)}{2(0.9827)}[1]$$
$$= \frac{0.1424}{1.9654}$$
$$= 0.0726$$

Jadi, rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian adalah 0.0726 pelanggan per menit.

Ekspektasi waktu menunggu dalam antrian (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1-P_N)} = \frac{L_q}{\lambda(1-\rho^N P_0)}$$
$$= \frac{0.0726}{2.7935(1-1.0173^{100}(0.1353))}$$
$$= \frac{0.0726}{2.7935(0.248)}$$
$$= \frac{0.0726}{0.6928}$$
$$= 0.1048$$

Jadi, rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam antrian adalah 0.1048 menit.

Ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem (L_s)

$$L_s = L_q + \rho(1-P_N)$$
$$= L_q + \rho(1-\rho^N P_0)$$
$$= 0.0726 + 1.0173\ \ (1-1.0173^{100}(0.1353))$$
$$= 0.0726 + 1.0173(0.248)$$
$$= 0.3387$$

Jadi, rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem adalah 0.3387 pelanggan per menit.

Ekspektasi waktu menunggu dalam sistem (W_s)

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)} = \frac{L_s}{\lambda(1-\rho^N P_0)}$$
$$= \frac{0.3387}{0.6928} = 0.4889$$

Jadi, rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem adalah 0.4889 menit.

Persentase pemanfaatan $= \rho\ x\ 100\%$
$$= 0.5087x\ 100\% = 50.87\%$$

5. Kesimpulan dan Saran

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis yang telah diperoleh, dapat disimpulkan bahwa :

1. Banyak kedatangan pelanggan pada Stasiun Pengisian Bahan-Bakar Umum (SPBU) Pasarwajo mengikuti distribusi Poisson dan waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial sehingga diperoleh model antrian (M/M/2):(FCFS/100/∞) dengan rata-rata kedatangan $(\lambda) = 2.7935$ dan rata-rata waktu pelayanan $(\mu) = 2.7458$, peluang masa sibuk $(\rho) = 0.5087$, rata-rata pelanggan yang menunggu dalam antrian $(L_q) = 0.0726$, rata-rata waktu yang dihabiskan dalam antrian $(W_q) = 0.1048$, rata-rata pelanggan yang menunggu dalam sistem $(L_s) = 0.1078$, dan rata-rata waktu yang dihabiskan dalam sistem $(W_s) = 0.4889$.
2. Model antrian di SPBU Pasarwajo sudah optimal karena kondisi *steady state* telah terpenuhi dengan persentase pelayan sibuk sebesar 50.87 %

5.2 Saran

1. Model antrian yang digunakan dalam penelitian ini adalah model (M/M/2) : (FCFS/100/∞). Bagi peneliti yang ingin mencoba untuk menerapkan struktur antrian *Multi Channel Single Phase* dapat menerapkannya dengan model yang berbeda.
2. Data yang digunakan dalam penelitian adalah data yang telah mencapai kondisi stabil. Bagi peneliti dengan model antrian yang sama dapat menggunakan data yang belum stabil (belum mencapai *steady-state*).

Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini dapat dilaksanakan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh sebab itu peneliti mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Pembimbing 1, Pembimbing 2 serta para Penguji yang telah memberikan ide, saran dan kritikan sehingga penelitian ini dapat terselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] A. Saraswati, Analisis Sistem Antrian Disiplin Prioritas Pada Bengkel Motor AHASS 10293 (ASZA MOTOR 2) Cabang Unggaran, Skripsi: Jurusan Matematika FMIPA UNS, 2016.

[2] B. Poernomo, T. Prasetyo and S. Jatmika, "Analisis Antrian Model Multi Channel - Singel Phase dan Optimalisasi Layanan Akademik (Studi Kasus pada STMIK ASIA MALANG)," *Jurnal POSITIF*, pp. 41-46, 2017.

[3] M. Hilman, N. K. N. and P. N. Utomo, "Optimasi Pelayanan pada SPBU PD ALADDIN 4 Banjarsari dengan Metode Antrian Multiple Channel Single Phase," *JURNAL INDUSTRIAL GALUH*, pp. 33-37, 2019.

[4] H. MZ, I. Pratiwi, T. Tamalika and I. Husin, "Analisis Sistem Antrian dengan Metode Simulasi," *Jurnal Desiminasi Teknologi*, pp. 52-53, 2019.

[5] W. L. Winston, Operations Research, Canada: Brooks/Cole, 2004.

[6] Y. Prihati, "Simulasi dan Permodelan Sistem Antrian Pelanggan di Loket Pembayaran Rekening XYZ Semarang," *Majalah Ilmiah Informatika*, vol. III, pp. 1-5, 2012.

[7] T. Kakiay, Dasar Teori Antrian untuk Kehidupan Nyata, Yogyakarta: Penerbit ANDI, 2004.

[8] Y. Verdika, "Model Antran Multi Channel dengan Pola Kedatangan Poisson," Skripsi, Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim (Malang), 2016.

[9] Aminudin, Prinsip-prinsip Riset Operasi, Jakarta: Penerbit Erlangga, 2002.

[10] F. Farkhan, Aplikasi Teori Antrian dan Simulasi Pada Pelayanan Teller Bank, Universitas Negeri Semarang: Matematika FMIPA, 2013.

[11] J. Susetyo and S. R. Nasution, "Analisis Sistem Antrian Multuple Channel Untuk Kapasitas Terbatas," *Jurnal Ilmiah Teknik Industri Vol.5 No.3*, pp. 191-199, 2017.

[12] A. Prabowo and I. C. Negara, "Penggunaan Uji Chi-Square Untuk Mengetahui Pengaruh Tingkat Pendidikan dan Umur Terhadap Pengetahuan Penasun Mengenai HIV-AIDS di Provinsi DKI Jakarta," *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya*, pp. 1-8, 2018.

[13] M. S. Bahar, M. L. Mananohas and C. E. J. C. Montolalu, "Model Sistem Antrian dengan Menggunakan Pola Kedatangan dan Pola Pelayanan Pemohon SIM di Satuan Penyelenggaraan Administrasi SIM Resort Kepolisian Manado," *Jurnal Matematika dan Aplikasi deCartesiaN*, pp. 15-21, 2018.

[14] P. Robiati, Aanalisis Sistem Antrian Seri Pada Fasilitas Pelayanan Kesehatan dan

Optimalisasinya (Studi Kasus Di Puskesmas Ungaran Kabupaten Semarang), Skripsi: Jurursan Matematika FMIPA UNS, 2015.

[15] F. Fathoni, Model Antrian Multi Channel Single Phase dengan Laju Layanan Heterogen Untuk Analisis Evaluasi Kinerja Keterlambatan dan Keberangkatan Kapal, Yogyakarta: Universitas Islam Indonesia, 2018.

[16] D. Purnawan, Analisis Model Antrian Perbaikan Sepeda Motor dengan Menggunakan Program Visual Basic, Skripsi: Jurusan Matematika FMIPA UNS, 2013.

[17] Y. Herliawan, Analisis dan Simulasi Antrian Pada Bengkel Fajar Motor, Kendari: Universitas Halu Oleo, 2020.

[18] Amri, M. and T. S. Malasy, "Analisis Sistem Antrian pada Stasiun Pengisian Bahan Bakar Umum," *Malikussaleh Industrial Engineering Journal Vol.2 No.2,* pp. 16-23, 2013.

[19] K. S. Prawiro and D. Agfazar, "Analisis Antrian Sepeda Motor pada SPBU Tanah Merdeka Menggunakan Simulasi Promodel," *Bulletin of Applied Industrial Engineering Theory*, 2020.

[20] P. Siagian, Penelitian Operasional : Teori dan Praktek, Jakarta: Universitas Indonesia Press, 1987.

[21] D. A. dan T. , Operation Research Model-model Pengambilan Keputusan, Bandung: PT Sinar Baru Algesindo, 2004.