ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA UNTUK SAMPEL TERSENSOR TIPE I DAN TIPE II

Ayudikta Fitri Salaam
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: ayudiktafitri@gmail.com

Wayan Somayasa[1], Muhammad Kabil Djafar[2]
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: [1]wayan.somayasa@uho.ac.id, [2]kabildjafar@uho.ac.id

ABSTRAK

Estimasi parameter adalah pendugaan karakteristik populasi (parameter) dengan menggunakan karakteristik sampel (statistik). Analisis uji hidup merupakan salah satu teknik statistika yang berguna untuk melakukan pengujian tentang keandalan komponen suatu produk atau pengukuran lamanya tahan hidup. Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan penduga parameter dari distribusi Gamma untuk sampel tersensor tipe I dan tipe II. Sensor tipe I merupakan tipe penyensoran dimana pengamatan uji hidup akan dihentikan jika telah tercapai waktu tertentu (waktu penyensoran). Sensor tipe II merupakan tipe penyensoran dimana pengamatan uji hidup akan dihentikan jika telah tercapai kegagalan dalam jumlah tertentu. Dalam penelitian ini, untuk mengestimasi parameter digunakan metode maksimum likelihood. Karena turunan pertama fungsi log-likelihood nonlinear, tidak dapat diselesaikan secara analitik, maka dilakukan pendekatan numerik yaitu dengan metode Newton-Raphson. Metode Newton-Raphson merupakan salah satu metode iterasi yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan nonlinear. Dengan menggunakan *software* R, untuk sampel tersensor tipe I menggunakan data daya tahan transistor diperoleh $\hat{\theta} = 5{,}24$ dan $\hat{\kappa} = 3{,}96$. Untuk sampel tersensor tipe II menggunakan data ketahanan hidup tikus jantan diperoleh $\hat{\theta} = 56{,}66$ dan $\hat{\kappa} = 2$. Berdasarkan perhitungan fungsi *survival* dan fungsi *hazard* dapat disimpulkan bahwa semakin lama waktu hidup individu/item, maka semakin rendah probabilitas bertahan hidupnya dan semakin tinggi probabilitas kegagalannya.

***Kata Kunci*: Distribusi Gamma, Sampel Tersensor Tipe I dan Tipe II, Estimasi Parameter, Metode Maksimum Likelihood, Metode Newton-Raphson.**

ABSTRACT

Parameter estimation is a method to estimate of population characteristics (parameters) using sample characteristics (statistics). Survival analysis is a statistical technique that is useful for testing the reliability of components of a product or measuring the length of life. The purpose of this study was to obtain parameter estimator of the Gamma distribution for type I and type II censored samples. Type I censoring is a type of censoring where the life test observation will be stopped if a certain time has been reached (censoring time). Type II censoring is a type of censoring where the life test observation will be stopped if a certain number of failures have been reached. In this study, the maximum likelihood method is used to estimate the parameters. Since the first derivative of the nonlinear log-likelihood function cannot be solved analytically, a numerical approach is used, namely the Newton-Raphson method. Newton-Raphson method is one of the iteration methods used to solve nonlinear problems. By using R software, for type I censored sample which is using transistor resistance data, $\hat{\theta} = 5{,}24$ and $\hat{\kappa} = 3{,}96$ are obtained. For the type II censored sample, which is using the survival data of male rats, it was obtained $\hat{\theta} = 56{,}66$ and $\hat{\kappa} = 2$. Based on the calculation of the survival function and the hazard function, it can be concluded that the longer the individual/item's lifespan, the lower the probability of survival and the higher the probability of failure.

***Keywords:* Gamma Distribution, Type I and Type II Censored Samples, Parameter Estimation, Maximum Likelihood Estimate, Newton-Raphson Method.**

1. Pendahuluan

Statistika adalah ilmu yang mempelajari bagaimana merencanakan, mengumpulkan, menganalisis, menginterpretasi, dan mempresentasikan data, [1]. Salah satu cara menganalisis yang dipergunakan dalam cabang ilmu statistika adalah analisis uji hidup. Analisis uji hidup merupakan salah satu teknik statistika yang berguna untuk melakukan pengujian tentang keandalan komponen suatu produk atau pengukuran lamanya tahan hidup. Keandalan suatu produk adalah peluang tidak terjadinya kerusakan suatu alat untuk melakukan fungsinya secara wajar pada periode waktu yang ditentukan, [2]. Analisis data uji hidup diterapkan pada beberapa bidang, diantaranya bidang industri dan kedokteran.

Data waktu hidup yang diperoleh dari percobaan uji hidup dapat berbentuk data lengkap, data tersensor tipe I, dan data tersensor tipe II. Data tersebut lengkap jika data diamati secara utuh. Data dikatakan tersensor tipe I jika data uji hidup dihasilkan setelah percobaan berjalan selama waktu yang ditentukan, sedangkan data dikatakan tersensor tipe II jika observasi diakhiri setelah sejumlah kematian atau kegagalan tertentu telah terjadi, [2].

Analisis uji hidup memerlukan suatu distribusi guna mempresentasikan data tersebut, sehingga inferensi atau analisisnya dapat dilakukan secara parametrik. Salah satu distribusi yang dapat digunakan dalam analisis uji hidup yaitu distribusi Gamma, [2].

Pada pemodelan statistika, model distribusi peluang digunakan untuk memodelkan distribusi peluang populasi, oleh karena itu karakteristik suatu populasi dapat dipelajari dari parameter-parameter model distribusi peluang tersebut. Untuk dapat mengetahui karakteristik dari populasi, maka perlu dilakukan inferensi terhadap parameter populasi berdasarkan sampel yang diambil dari populasi tersebut melalui analisis data. Berdasarkan sampel tersebut, maka nilai parameter yang menjadi perhatian diestimasi dengan menggunakan statistik yang relevan yang diperoleh dengan menggunakan metode-metode tertentu, [3].

Analisis statistik terbagi menjadi dua yaitu analisis deskriptif dan analisis inferensial. Analisis deskriptif berkaitan dengan penyajian data, sedangkan analisis inferensial berhubungan dengan estimasi parameter dan uji hipotesis untuk melihat apakah suatu statistik telah menggambarkan nilai suatu populasi, [4]. Estimasi parameter adalah pendugaan karakteristik populasi (parameter) dengan menggunakan karakteristik sampel (statistik). Salah satu cara untuk menduga parameter populasi yang tidak diketahui yaitu menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimate* (MLE). Metode MLE adalah metode yang memaksimumkan fungsi likelihood [5].

Pada bagian dua dibahas tentang konsep analisis uji hidup yang berisi pengertian fungsi survival, konsep penyensoran serta pengertian distribusi gamma dan sifat-sifatnya. Selanjutnya pada bagian tiga dibahas hasil penelitian yang meliputi prosudur estimasi parameter distribusi gamma untuk sampel tersensor tipe satu dan tipe dua. Paper diakhiri dengan penutup berisi kesimpulan dan saran pada bagian empat.

2. Konsep Analisis Uji Hidup

Analisis daya tahan hidup adalah suatu metode yang berhubungan dengan waktu, mulai dari waktu awal atau *start point* sampai dengan terjadinya suatu kejadian khusus atau *end point*, [6].

Analisis *survival* merupakan teknik statistik yang digunakan untuk menganalisis data yang bertujuan untuk mengetahui hasil dari variabel yang berpengaruh terhadap suatu awal kejadian hingga akhir kejadian, misalnya waktu yang dinyatakan dalam hari, minggu, bulan, atau tahun. Kejadian awal dapat dicontohkan sebagai awal suatu objek mengalami kejadian dan kejadian akhir dicontohkan sebagai kegagalan objek atau keberhasilan objek, [7]. Dalam analisis *survival*, terdapat istilah *failure* (walaupun peristiwa yang sebenarnya mungkin saja sukses) yaitu suatu kejadian akhir dimana tercatatnya kejadian yang diinginkan, [8].

2.1. Fungsi Daya Tahan (*Survival*)

Fungsi daya tahan (*survival*) adalah peluang suatu individu yang masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu t $(t > 0)$, [2].

Definisi 2.1 [2] Misalkan T merupakan variabel acak dari waktu hidup suatu individu dalam interval $[0, \infty)$, maka fungsi distribusi kumulatif $F(t)$ untuk distribusi kontinu dengan fungsi kepadatan peluang $f(t)$ dinyatakan sebagai berikut:

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(x)\,dx \tag{1}$$

Fungsi *survival* dari T adalah

$$S(t) = \int_t^\infty f(x)\,dx \tag{2}$$

Dalam hal ini fungsi tahan hidup $S(t)$ merupakan fungsi monoton turun yang mempunyai sifat:

a. $S(0) = 1$

b. $S(\infty) = 0$

2.1.1. Fungsi Kegagalan (*Hazard*)

Definisi 2.2 [2] Fungsi *hazard* merupakan laju kegagalan pada waktu t sampai $t + \Delta t$, jika diketahui individu tersebut masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu t, fungsi *hazard* dari waktu tahan hidup T didefinisikan dengan:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)} \quad (3)$$

2.2. Penyensoran

Penyensoran data dilakukan untuk memperpendek waktu percobaan karena dalam mengukur waktu kegagalan atau kematian individu terkadang diperlukan waktu yang lama dan biaya yang besar. Pengamatan tidak tersensor merupakan waktu tahan hidup yang dicatat dari individu yang mati selama waktu percobaan, yaitu waktu dari awal hingga mengalami kegagalan. Sedangkan pengamatan tersensor merupakan pengamatan waktu tahan hidup suatu individu yang tidak diketahui secara pasti, sehingga pengamatannya harus dibatasi oleh waktu atau sebab lain [9].

2.2.1. Sensor Tipe I

Sensor tipe I merupakan tipe penyensoran dimana pengamatan uji hidup akan dihentikan jika telah tercapai waktu tertentu (waktu penyensoran). Jika waktu penyensoran sama untuk semua unit maka dikatakan penyensoran tunggal. Jika waktu penyensoran untuk setiap unit berbeda maka dikatakan penyensoran ganda. Misalkan T_i adalah waktu hidup dari n individu dan waktu sensornya adalah L_i. Suatu individu dikatakan terobservasi jika $T_i \leq L_i$ dan observasi dilakukan hanya pada $t_i = \min(T_i, L_i)$. Sehingga variabel yang menunjukkan bahwa komponen telah gagal adalah

$$\delta_i = \begin{cases} 1 \text{ jika } T_i \leq L_i \\ 0 \text{ jika } T_i > L_i \end{cases}$$

δ_i menunjukkan apakah waktu T_i tersensor atau tidak, dan $t_i = T_i$ jika terobservasi, dan $t_i = L_i$ jika tidak terobservasi. Pdf (*probability density function*) bersama dari t_i dan δ_i adalah

$$f(t_i)^{\delta_i} S(L_i)^{1-\delta_i} \quad (4)$$

Maka fungsi likelihoodnya adalah

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(t_i)^{\delta_i} S(L_i)^{1-\delta_i} \quad (5)$$

[2]

2.2.2. Sensor Tipe II

Sensor tipe II merupakan tipe penyensoran dimana pengamatan uji hidup akan dihentikan jika telah tercapai kegagalan dalam jumlah tertentu. Sensor tipe II merupakan tipe penyensoran dimana sampel ke-r merupakan pengamatan terkecil dalam sampel acak berukuran n yang diamati ($1 \leq r \leq n$). Dari total sampel berukuran n, pengamatan akan dihentikan ketika diperoleh sebanyak r individu yang mengalami kegagalan, dimana $r < n$. Sehingga dapat menghemat waktu dan biaya. Dalam penyensoran ini, r ditentukan terlebih dahulu sebelum data dikumpulkan, [2].

Data terdiri dari r waktu hidup terkecil $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \cdots \leq T_{(r)}$ pada waktu hidup sampel acak n dimana $T_1, \dots, T_n$ dari distribusi yang bersangkutan. Pdf bersama dari $T_{(1)}, \dots, T_{(r)}$

$$\frac{n!}{(n-r)!} f(t_{(1)}) \dots f(t_{(r)}) \left[S(t_{(r)})\right]^{n-r} \quad (6)$$

2.3. Distribusi Gamma

Distribusi Gamma merupakan distribusi peluang kontinu. Dalam aplikasinya, distribusi Gamma dapat digunakan untuk memodelkan distribusi peluang dari waktu tunggu atau masa hidup suatu objek atau individu, [10].

Definisi 2.3 [11] Peubah acak kontinu X berdistribusi Gamma, dengan parameter θ dan κ jika mempunyai pdf berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \;\; ; x > 0 \quad (7)$$

dimana $\Gamma(\kappa) = \int_0^{\infty} x^{\kappa-1} e^{-x}\, dx$ adalah fungsi Gamma, $\theta > 0$ adalah parameter skala, dan $\kappa > 0$ adalah parameter bentuk.

Cumulative distribution function (cdf) dari distribusi Gamma yaitu sebagai berikut:

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_0^{t/\theta} u^{\kappa-1} \exp(-u)\, du \quad (8)$$

Fungsi daya tahan (*survival*) distribusi Gamma yaitu sebagai berikut:

$$S(t) = \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_{t/\theta}^{\infty} u^{\kappa-1} \exp(-u)\, du \quad (9)$$

Fungsi kegagalan (*hazard*) distribusi Gamma yaitu sebagai berikut:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{t^{\kappa-1} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)}{\theta^{\kappa} \int_{t/\theta}^{\infty} u^{\kappa-1} \exp(-u)\, du} \quad (10)$$

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Estimasi Parameter untuk Sampel Tersensor Tipe I dan Tipe II

Distribusi Gamma untuk sampel tersensor tipe I maupun tipe II memiliki parameter θ dan κ yang belum diketahui, sehingga parameter tersebut akan diestimasi terlebih dahulu. Pada penelitian ini, metode estimasi parameter yang akan digunakan yaitu metode maksimum likelihood. Dalam metode maksimum likelihood, penduga untuk θ dan κ dapat ditentukan dari penyelesaian sistem persamaan $\frac{\partial \ln L(\theta,\kappa)}{\partial \theta} = 0$ dan $\frac{\partial \ln L(\theta,\kappa)}{\partial \kappa} = 0$.

3.1.1. Estimasi Parameter untuk Sampel Tersensor Tipe I

Fungsi likelihood dari distribusi Gamma untuk sampel tersensor tipe I memiliki bentuk:

$$L(\theta,\kappa) = \left(\frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)}\right)^{r}\left[\prod_{i=1}^{n} t_{(i)}^{\kappa-1}\right] \times \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_{(i)}}{\theta}\right) \tag{11}$$

dimana $r = \sum \delta_i$ adalah jumlah kegagalan yang diamati

Maka fungsi log-likelihood nya menjadi

$$\ln L(\theta,\kappa) = -\kappa r \ln\theta - r\ln\Gamma(\kappa) + (\kappa-1)\sum_{i=1}^{n}\ln t_{(i)} - \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{(i)}}{\theta} \tag{12}$$

Penduga maksimum likelihood untuk θ dan κ diperoleh dengan menyamakan turunan pertama dari fungsi log-likelihood terhadap θ dan κ dengan nol, yaitu dengan mencari penyelesaian dari persamaan $\frac{\partial \ln L(\theta,\kappa)}{\partial \theta} = 0$ dan $\frac{\partial \ln L(\theta,\kappa)}{\partial \kappa} = 0$.

Turunan pertama dari persamaan (12) terhadap θ dan selanjutnya disamakan dengan nol diperoleh:

$$\left.\frac{\partial \ln L(\theta,\kappa)}{\partial \theta}\right|_{\substack{\theta=\hat\theta\\ \kappa=\hat\kappa}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\hat\kappa r}{\hat\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{(i)}}{\hat\theta^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{(i)}}{\hat\kappa r} \tag{13}$$

Turunan pertama dari persamaan (12) terhadap κ dan selanjutnya disamakan dengan nol diperoleh:

$$\left.\frac{\partial \ln L(\theta,\kappa)}{\partial \kappa}\right|_{\substack{\theta=\hat\theta\\ \kappa=\hat\kappa}} = 0 \Leftrightarrow -r\ln\hat\theta - r\psi(\hat\kappa) + \sum_{i=1}^{n}\ln t_{(i)} = 0 \tag{14}$$

dimana

$\psi(\kappa) = \frac{d\ln\Gamma(\kappa)}{d\kappa} = \frac{\Gamma'(\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \approx \log\kappa - \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{12\kappa^2} + \cdots$

Substitusi persamaan (13) pada persamaan (14) sehingga menjadi

$$\left.\frac{\partial \ln L(\theta,\kappa)}{\partial \kappa}\right|_{\substack{\theta=\hat\theta\\ \kappa=\hat\kappa}} = 0 \Leftrightarrow -r\ln\sum_{i=1}^{n} t_{(i)} + r\ln(\hat\kappa r) - r\psi(\hat\kappa) + \sum_{i=1}^{n}\ln t_{(i)} = 0 \tag{15}$$

Karena turunan pertama terhadap κ merupakan fungsi nonlinear, maka akan digunakan metode numerik yaitu metode Newton-Raphson. Untuk itu, maka diperlukan turunan kedua terhadap κ.

Turunan kedua terhadap κ:

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L(\theta,\kappa)}{\partial \kappa^2}\right|_{\substack{\theta=\hat\theta\\ \kappa=\hat\kappa}} = \frac{1}{\hat\kappa} - r\psi'(\hat\kappa) \tag{16}$$

dimana $\psi'(\kappa) = \frac{d\psi(\kappa)}{d\kappa} \approx \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{2\kappa^2} + \frac{1}{6\kappa^3} - \frac{1}{30\kappa^5} + \cdots$

Sehingga solusi dengan metode iterasi Newton-Raphson menjadi:

$$\hat\kappa_{(j+1)} = \hat\kappa_{(j)} - \frac{-r\ln\sum_{i=1}^{n} t_{(i)} + r\ln\left(\hat\kappa_{(j)} r\right) - r\psi\left(\hat\kappa_{(j)}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln t_{(i)}}{\frac{1}{\hat\kappa_{(j)}} - r\psi'\left(\hat\kappa_{(j)}\right)}$$

3.1.2. Estimasi Parameter untuk Sampel Tersensor Tipe II

Fungsi likelihood dari distribusi Gamma untuk sampel tersensor tipe II memiliki bentuk:

$$L(\theta,\kappa) = \frac{n!}{(n-r)!}\left(\frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)}\right)^{r}\left[\prod_{i=1}^{r} t_{(i)}^{\kappa-1}\right] \times \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{r} t_{(i)}}{\theta}\right) \times \left[\frac{1}{\Gamma(\kappa)}\int_{t_{(r)}/\theta}^{\infty} u^{\kappa-1}\exp(-u)\,du\right]^{n-r} \tag{17}$$

Maka fungsi log-likelihood nya menjadi

$$\ln L(\theta,\kappa) = \ln\frac{n!}{(n-r)!} - \kappa r\ln\theta - r\ln\Gamma(\kappa) + (\kappa-1)\sum_{i=1}^{r}\ln t_{(i)} - \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{(i)}}{\theta} - (n-r)\ln\Gamma(\kappa) + (n-r) \times \ln\left[\int_{t_{(r)}/\theta}^{\infty} u^{\kappa-1}\exp(-u)\,du\right] \tag{18}$$

Penduga maksimum likelihood untuk θ dan κ diperoleh dengan menyamakan turunan pertama dari fungsi log-likelihood terhadap θ dan κ dengan nol, yaitu dengan mencari penyelesaian dari persamaan $\frac{\partial \ln L(\theta,\kappa)}{\partial \theta} = 0$ dan $\frac{\partial \ln L(\theta,\kappa)}{\partial \kappa} = 0$.

Turunan pertama dari persamaan (18) terhadap θ dan selanjutnya disamakan dengan nol diperoleh:

$$\left.\frac{\partial \ln L(\theta,\kappa)}{\partial \theta}\right|_{\substack{\theta=\hat\theta\\ \kappa=\hat\kappa}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\kappa r}{\hat\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{(i)}}{\hat\theta^2} \tag{19}$$

$$+\frac{n-r}{\int_{t_{(r)}/\hat{\theta}}^{\infty} u^{\kappa-1}\exp(-u)\,du} \times \frac{\partial\left[\int_{t_{(r)}/\hat{\theta}}^{\infty} u^{\kappa-1}\exp(-u)\,du\right]}{\partial\theta} = 0$$

Turunan pertama dari persamaan (18) terhadap κ dan selanjutnya disamakan dengan nol diperoleh:

$$\left.\frac{\partial \ln L(\theta,\kappa)}{\partial\kappa}\right|_{\substack{\theta=\hat{\theta}\\ \kappa=\hat{\kappa}}} = 0 \Leftrightarrow -r\ln\hat{\theta} + \sum_{i=1}^{r}\ln t_{(i)} - n\psi(\kappa) + \frac{n-r}{\int_{t_{(r)}/\hat{\theta}}^{\infty} u^{\kappa-1}\exp(-u)\,du} \times \frac{\int_{t_{(r)}/\hat{\theta}}^{\infty} u^{\kappa-1}\exp(-u)\,du}{\partial\kappa} = 0 \quad (20)$$

dimana

$$\psi(\kappa) = \frac{d\ln\Gamma(\kappa)}{d\kappa} = \frac{\Gamma'(\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \approx \log\kappa - \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{12\kappa^2} + \cdots$$

Karena turunan pertama terhadap κ merupakan fungsi nonlinear, maka akan digunakan metode numerik yaitu metode Newton-Raphson. Untuk itu, maka diperlukan turunan keduanya.

Sehingga solusi dengan metode iterasi Newton-Raphson menjadi:

$$\begin{bmatrix}\hat{\theta}_{(j+1)}\\ \hat{\kappa}_{(j+1)}\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}\hat{\theta}_{(j)}\\ \hat{\kappa}_{(j)}\end{bmatrix} - \left[\left(H\left(\hat{\theta}_{(j)},\hat{\kappa}_{(j)}\right)\right)^{-1} \boldsymbol{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(j)},\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{(j)}\right)\right]$$

dimana

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\kappa}) = \begin{bmatrix}\frac{\partial\ln L(\theta,\kappa)}{\partial\theta}\\ \frac{\partial\ln L(\theta,\kappa)}{\partial\kappa}\end{bmatrix}$$

$$H(\theta,\kappa) = \begin{bmatrix}\frac{\partial^2\ln L(\theta,\kappa)}{\partial\theta^2} & \frac{\partial^2\ln L(\theta,\kappa)}{\partial\theta\partial\kappa}\\ \frac{\partial^2\ln L(\theta,\kappa)}{\partial\kappa\partial\theta} & \frac{\partial^2\ln L(\theta,\kappa)}{\partial\kappa^2}\end{bmatrix}$$

Vektor $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\kappa})$ dan matriks $H(\theta,\kappa)$ dihitung pada titik $\theta = \hat{\theta}_{(j)}$ dan $\kappa = \hat{\kappa}_{(j)}$.

3.2. Goodness of Fit untuk Sampel Tersensor Tipe I dan Tipe II

Untuk mengetahui bahwa data yang dimiliki benar berdistribusi Gamma, maka akan dilakukan uji *goodness of fit*.

Hipotesis:

H_0: Daya tahan populasi berdistribusi Gamma

H_1: Daya tahan populasi tidak berdistribusi Gamma

Menurut [12], misalkan $t_{(1)} < \cdots < t_{(r)}$ merupakan sampel terurut. Maka transformasi nilai x_i $\left(x_i = F_0(t_i)\right)$ menjadi $x_{(1)} < \cdots < x_{(r)}$. Sehingga statistik uji sampel tersensor tipe I terhadap hipotesis tersebut adalah

$${}_1Q_{tn} = \sum_{i=1}^{r+1} a_i x_{(i)} \quad (21)$$

dimana: $a_i = \frac{6\left((2i-1)(r+1)-n^2\right)}{n^2(r+1)}; 1 \le i \le r$

$$a_{r+1} = \frac{6r(n^2-r^2-r)}{n^2(r+1)}$$

Statistik uji sampel tersensor tipe II terhadap hipotesis tersebut adalah

$${}_2Q_{rn} = \sum_{i=1}^{r} a_i x_{(i)} \quad (22)$$

dimana: $a_i = \frac{6\left((2i-1)r-n^2\right)}{n^2 r}; 1 \le i \le r-1$

$$a_r = \frac{6(r-1)\left(n^2-r(r-1)\right)}{n^2 r}$$

Kriteria penolakan:

Tolak H_0 pada tingkat signifikansi α, jika Q hitung $<$ nilai tabel$_{\alpha/2}$ atau Q hitung $>$ nilai tabel$_{(1-\alpha)/2}$.

Nilai tabel untuk statistik ${}_1Q_{tn}$ dan ${}_2Q_{rn}$ dapat dilihat pada [15].

3.3. Analisis Data

Data tersensor tipe I menggunakan data ketahanan hidup dari 34 transistor, sedangkan data tersensor tipe II menggunakan data ketahanan hidup dari 30 tikus jantan yang terpapar radiasi.

Tabel 1. Data Tersensor Tipe I

Transistor yang gagal ke-	Waktu t (minggu)	Transistor yang gagal ke-	Waktu t (minggu)
1	3	18	13
2	4	19	13
3	5	20	13
4	6	21	13
5	6	22	17
6	7	23	17
7	8	24	19
8	8	25	19
9	9	26	25
10	9	27	29
11	9	28	33
12	10	29	42
13	10	30	42
14	11	31	52
15	11	32	52*
16	11	33	52*
17	13	34	52*

Sumber: [13]

Tabel 2. Data Tersensor Tipe II

Tikus yang mati ke-	Waktu t (minggu)	Tikus yang mati ke-	Waktu t (minggu)
1	40	11	123
2	62	12	125
3	69	13	128
4	77	14	136
5	83	15	137
6	88	16	152
7	94	17	152
8	101	18	153
9	109	19	160
10	115	20	165

Sumber: [14]

Berdasarkan hasil perhitungan yang dilakukan dengan bantuan *software* R, maka untuk data tersensor tipe I yaitu data daya tahan transistor diperoleh $\hat{\kappa} = 3{,}96$. Nilai estimator diperoleh setelah melakukan 48 kali iterasi. Kemudian untuk mengetahui nilai $\hat{\theta}$, maka substitusi nilai $\hat{\kappa} = 3{,}96$ pada persamaan (13) sehingga diperoleh $\hat{\theta} = 5{,}24$.

Berdasarkan perhitungan yang dilakukan dengan bantuan *software* R, maka untuk data tersensor tipe II yaitu data ketahanan hidup tikus jantan diperoleh nilai $\hat{\theta} = 56{,}66$ dan $\hat{\kappa} = 2$. Nilai estimator diperoleh setelah melakukan 14 kali iterasi.

4. Kesimpulan dan Saran

4.1. Kesimpulan

Adapun kesimpulan akhir dari penelitian Estimasi Parameter Distribusi Gamma untuk Sampel Tersensor Tipe I dan Tipe II adalah sebagai berikut:

1. Penduga parameter distribusi Gamma untuk sampel tersensor tipe I dengan metode maksimum likelihood adalah
$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{(i)}}{\hat{\kappa} r}$$
dan
$$\hat{\kappa}_{(j+1)} = \hat{\kappa}_{(j)} - \frac{-r \ln \sum_{i=1}^{n} t_{(i)} + r \ln(\hat{\kappa}_{(j)} r) - r\psi(\hat{\kappa}_{(j)}) + \sum_{i=1}^{n} \ln t_{(i)}}{\frac{1}{\hat{\kappa}_{(j)}} - r\psi'(\hat{\kappa}_{(j)})}$$
dimana penduga untuk κ dicari menggunakan metode iterasi Newton-Raphson. Kemudian untuk sampel tersensor tipe II, turunan pertama dari log-likehood terhadap parameter θ dan κ menghasilkan persamaan berbentuk nonlinear, sehingga untuk menyelesaikannya digunakan metode iterasi Newton-Raphson multivariabel.
2. Pada penerapan data tersensor tipe I yaitu pada data kegagalan transistor, diperoleh $\hat{\theta} = 5{,}24$ dan $\hat{\kappa} = 3{,}96$. Pada penerapan data tersensor tipe II yaitu pada data kematian tikus jantan, diperoleh $\hat{\theta} = 56{,}66$ dan $\hat{\kappa} = 2$. Parameter duga tersebut dapat digunakan untuk mengetahui fungsi *survival* dan fungsi *hazard*, yaitu semakin lama waktu hidup suatu individu/item maka semakin rendah probabilitas bertahan hidupnya dan semakin tinggi probabilitas kegagalannya.

4.2. Saran

Saran yang dapat penulis berikan untuk peneliti selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Dalam pelaksanaan penelitian lebih lanjut mengenai estimasi distribusi Gamma untuk sampel tersensor, dapat menggunakan metode estimasi parameter yang lain atau membandingkan metode estimasi parameter yang telah diteliti dengan metode estimasi parameter lainnya.
2. Peneliti selanjutnya disarankan untuk menggunakan tipe penyensoran selain penyensoran tipe I dan tipe II pada distribusi Gamma.

Ucapan Terimaksi. Penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya atas segala curahan perhatian yang diberikan oleh dosen pembimbing sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik. Ucapan terimakasih juga penulis sampaikan kepada segenap sivitas akademika FMIPA UHO atas segala keramahan pelayanan yang diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini tepat waktu.

Daftar Pustaka

[1] Laili, U. F. 2020. *Buku Ajar Statistika 1*. Yogyakarta: Bintang Pustaka Madani.

[2] Lawless, J. F. 1982. *Statistical Model and Methods for Lifetime Data*. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc.

[3] Lubis, Dasari, & Agustina. 2017. Penerapan Model M_0 dan Model M_t untuk Mengestimasi Ukuran Populasi Tertutup pada Data *Capture-Recapture*. *Jurnal EurekaMatika*. 5(1): 47-48.

[4] Haryono, S. 2017. *Metode SEM Untuk Penelitian Manajemen: AMOS, LISREL & PLS*. Bekasi: Intermedia Personalia Utama.

[5] Nurlaila, D., Kusnandar, D., & Sulistianingsih, E. 2013. Perbandingan Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan Metode Bayes dalam Pendugaan Parameter Distribusi Eksponensial. *Buletin Ilmiah Matematika Statistik dan Terapannya (Bimaster)*. 02(1): 51–56.

[6] Collect, D. 2004. *Modelling Survival Data in Medical Research Second Edition*. London: Chapman and Hall.

[7] Kleinbaum, D. G. & Klein, M. 2011. *Survival Analysis a Self-Learning Text Third Edition*. New York: Springer.

[8] Jakperik, D. & Ozoje, M. O. 2012. Survival Analysis of Average Recovery Time of Tuberculosis Patients in Northern Region, Ghana. *International Journal of Current Research*. 4(9): 123-125.

[9] Murti, V. D., Sudarno, & Suparti. 2012. Kajian Data Ketahanan Hidup Tersensor Tipe I Berdistribusi Eksponensial Dan Six Sigma. *Jurnal Gaussian*. 1(1): 241–248.

[10] Lukitosari, V. 2012. Penentuan Kuantitas Optimal dan *Reorder Point* pada Persediaan Suku Cadang dengan Distribusi Gamma. *Journal Mathematics and Its Applied*. 9(1): 31–39.

[11] Walpole, R. E., & Myers R. H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan Edisi Keempat*. Bandung: ITB.

[12] Grané, A. 2009. Exact Goodness-of-Fit Tests for Censored Data. *Statistics and Econometrics Series*. 10.

[13] Wilk, M. B., Gnanadesikan, R., & Huyett, M.J. 1962. Probability Plots for the Gamma Distribution. *Jurnal Technometrics*. 4(1): 1-20.

[14] Furth, J., Upton, A. C., & Kimball, A. W. 1959. Late Pathologic Effects of Atomic Detonation and Their Pathogenesis. *Radiation Research.* 1: 243-264.

Diterima pada tanggal 10 Januari 2023.
Terbit online pada tanggal 29 April 2023