

PEMANFAATAN PUSAT DAN BASIS GRAF DALAM MENGOPTIMALKAN PEMASANGAN SENSOR KEBAKARAN

Wa Ode Masitaroh Saleha

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Hasanuddin, Makassar, Indonesia
E-mail: waodemasitarohsaleha@gmail.com

Hasmawati¹⁾, Muhammad Zakir²⁾

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Hasanuddin, Makassar, Indonesia

ABSTRAK

Kebakaran dapat terjadi dimana saja, baik itu di perumahan, gedung perkantoran atau di tempat umum. Keterlambatan informasi yang diperoleh petugas pemadam kebakaran atau pemilik rumah menjadi salah satu penyebab parahnya kebakaran, sehingga perlu adanya alat atau metode yang dapat memberi informasi yang cepat dan akurat. Salah satu alat yang dapat memberi informasi dengan cepat dan akurat tentang kebakaran adalah sensor kebakaran. Sensor kebakaran secara simultan menerima sinyal dan mengirimkan sinyal yang dapat mendeteksi lokasi kebakaran dengan tepat serta memberikan peringatan tentang kemungkinan terjadinya kebakaran di suatu area tertentu. Namun, dalam banyak kasus, penentuan jumlah dan letak pemasangan sensor kebakaran masih kurang optimal. Untuk mengatasi masalah tersebut digunakan pendekatan graf dengan pemanfaatan pusat dan basis graf sebagai solusi dari permasalahan optimasi jumlah dan letak pemasangan sensor kebakaran. Studi kasus untuk penelitian ini dilakukan di Kota Baubau yang memiliki 43 kelurahan. Berdasarkan analisis, hanya empat kelurahan saja yakni, Kelurahan Kampoehano, Kelurahan Kadolo, Kelurahan Kaobula dan Kelurahan Lipu yang harus dipasang sensor kebakaran di Kota Baubau.

Kata Kunci: Graf Dual, Himpunan Pembeda, Basis, Dimensi Metrik, Pusat Graf, Sensor Kebakaran.

ABSTRACT

A fire can happen anywhere, whether it's in a home, an office building or a public space. The delay in information being obtained by firefighters or homeowners is one of the causes to the severity of fires, so a tool or method that can provide fast and accurate information is required. One of the tools that can provide information about fire quickly and accurately is a fire sensor. The fire sensor simultaneously receives and sends a signal that can detect the exact location of the fire as well as provide a warning about the possibility of a fire in a specific area. However, in many cases, it is less than optimum for determining the number and location of fire sensor installations. To solve this problem, a graph approach is used, with the usage of the graph's center and basis as a solution to the problem of optimizing the number and location of fire sensor installations. The case study for this research was conducted in the city of Baubau, which has 43 urban villages. According to the analysis, only four urban villages, namely Kampoehano Urban Village, Kadolo Urban Village, Kaobula Urban Village and Lipu Urban Village should have fire sensors installed in Baubau City.

Keywords: Dual Graph, Resolving Set, Basis, Metric Dimension, Center Graph, Fire Sensor.

1. Pendahuluan

Teori graf bermula dari masalah jembatan Konigsberg. Leonhard Euler, seorang ahli matematika Swiss, memecahkan masalah ini untuk pertama kalinya pada tahun 1736. Euler mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg, dalam sekali waktu. Euler memberikan menyelesaikan permasalahan tersebut ke dalam bentuk

graf dengan empat daerah merepresentasikan titik dan tujuh jembatan merepresentasikan sisi [5].

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi [5]. Penelitian terkait Teori Graf hingga saat ini terus berkembang pesat dan memiliki banyak topik penelitian yang menarik diantaranya: bilangan kromatik, dimensi

metrik, dimensi partisi, teori Ramsey, pelabelan dan lain sebagainya.

Salah satu topik yang dapat dikembangkan dalam teori graf adalah dimensi metrik. Dimensi metrik diperkenalkan oleh Slater [7], Harary dan Melter [4]. Slater menggunakan istilah *reference set* untuk menyatakan himpunan pembeda minimum graf G . Dia menyatakan kardinalitas dari himpunan pembeda minimum disebut *location number* graf G [8]. Sementara itu, Harary dan Melter menggunakan istilah himpunan pembeda (*resolving set*) untuk mendeskripsikan konsep dimensi metrik seperti yang kita kenal sekarang [4].

Untuk menentukan dimensi metrik graf melibatkan konsep jarak antara dua titik pada suatu graf. Misalkan v dan w adalah titik-titik pada graf terhubung G , maka jarak antara titik v dan w pada graf G adalah panjang lintasan terpendek antara v dan w pada G , dinotasikan dengan $d(v, w)$. Konsep lainnya adalah koordinat dan himpunan pembeda (*resolving set*). Jika setiap koordinat titik di graf G terhadap himpunan S memiliki hasil yang berbeda maka S disebut himpunan pembeda. Himpunan pembeda dengan kardinalitas (jumlah anggota) minimum disebut himpunan pembeda minimum (*minimum resolving set*) atau basis dari G . Jadi, basis dalam graf adalah himpunan titik-titik yang dapat merepresentasikan titik-titik yang lain dalam suatu graf. Sedangkan, kardinalitas dari basis disebut dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan $dim(G)$ [3].

Penelitian mengenai dimensi metrik masih terus dilakukan. Hal ini dibuktikan dengan banyaknya hasil penelitian tentangnya. Diantaranya penelitian oleh (Chartrand dkk., 2000) telah menentukan dimensi metrik dari graf lintasan, graf lengkap dan graf lingkaran [2]. Utomo dan Dewi (2018) telah menentukan dimensi metrik dari graf $Amal(nK_m)$, dimana untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 4$ dimensi metriknya adalah $(m - 2)n$ [9]. (Asmiati dkk., 2019) telah mendapatkan dimensi metrik hasil operasi tertentu pada graf Petersen diperumum ($sP_{n,1}$) adalah $s + 1$, untuk n ganjil dan $s + 2$, untuk n genap [1]. Adapula penelitian yang dilakukan oleh (Shulhany dkk., 2021) telah memperoleh dimensi metrik pada graf calendula ($Cl_{3,n}$) adalah 2, dengan $Cl_{3,n}$ adalah graf calendula berorde $3n - 3$ dan $n \geq 3$ [6]. Selain itu, konsep dimensi metrik juga dapat diterapkan pada permasalahan di dunia nyata. Salah satunya pada pemasangan sensor kebakaran [10].

Sensor kebakaran adalah salah satu alat penting untuk menjaga keamanan tempat tinggal. Sensor kebakaran dirancang untuk mendeteksi lokasi kebakaran dan memperingatkan orang tentang kemungkinan

terjadinya kebakaran di area jangkauan. Sehingga, dapat mengambil tindakan untuk melindungi diri atau mencegah penyebaran api. Saat ini dikembangkan sensor kebakaran yang dapat memberikan sinyal berupa lokasi sumber kebakaran kepada operator atau petugas. Hal tersebut tentunya dapat mempermudah mengurangi laju penyebaran api.

Penelitian yang dilakukan oleh Suhud Wahyudi (2018), menggunakan konsep dimensi metrik untuk meminimalkan pemasangan sensor kebakaran sebuah gedung yang memiliki 12 ruangan. Dari hasil analisa yang dilakukan pada penelitian tersebut, sensor kebakaran yang harus dipasang pada gedung hanya di tiga ruangan saja [10].

Selain pada sebuah gedung, pemasangan sensor kebakaran sangat baik dilakukan pada sebuah kota. Di kota rawan terjadi kebakaran dan terkadangantisipasi dari petugas pemadam kebakaran terlambat. Namun, sebelum memutuskan berapa banyak sensor kebakaran yang akan dipasang, ada beberapa hal yang perlu dipertimbangkan. Pemasangan sensor yang terlalu banyak akan memakan biaya yang cukup besar, sedangkan pemasangan sensor kebakaran terlalu sedikit dapat menyebabkan kesulitan dalam mendeteksi sumber api. Untuk itu, optimalisasi dalam penentuan banyaknya sensor kebakaran pada suatu kota perlu dilakukan. Penentuan banyaknya sensor kebakaran yang perlu dipasang pada suatu kota dapat dilakukan dengan mengaplikasikan dimensi metrik dari suatu graf. Dimensi metrik dari graf terhubung dinyatakan sebagai banyaknya sensor kebakaran yang diperlukan pada suatu kota.

Pemasangan sensor kebakaran akan memberikan efektivitas yang maksimal jika diletakkan di tempat yang tepat. Oleh karena itu, sensor kebakaran harus diletakkan di area-area yang strategis. Salah satu cara untuk menentukan area penempatan sensor kebakaran yang strategis yaitu dengan memanfaatkan pusat dan basis suatu graf terhubung. Dengan memilih salah satu dari basis, dapat ditentukan area mana saja yang dapat dipasang sensor kebakaran untuk mendeteksi asal adanya api. Pencarian basis pada suatu graf memberikan representasi yang berbeda untuk setiap area yang ada. Sehingga, representasi tersebut memberikan lokasi yang identik untuk setiap area, dengan begitu jika terjadi kebakaran sumber api dapat langsung terdeteksi. Sedangkan, titik pusat merupakan titik yang paling representatif dibanding titik-titik yang lain, sehingga area yang dinyatakan oleh titik tersebut adalah area yang paling representatif ditinjau dari segi jarak. Pencarian titik pusat graf suatu wilayah bertujuan untuk memberikan rute terpendek antara suatu area ke setiap area lainnya. Penentuan rute terpendek ini diperlukan untuk

mengoptimalkan waktu dan biaya yang dikeluarkan untuk menempuh jarak dari suatu sumber ke tujuan. Oleh karena itu, di sekitar pemasangan sensor kebakaran juga ditempatkan mobil pemadam kebakaran yakni tempat sensor kebakaran tersebut merupakan area yang dinyatakan oleh titik pada basis yang sekaligus merupakan titik pusat dari graf.

Penentuan minimal sensor dan penempatan sensor kebakaran pada suatu kota merupakan masalah yang menarik untuk dikaji karena keberhasilan dari penelitian ini dapat digunakan untuk meminimalkan biaya. Selain itu, dapat mendeteksi dengan cepat kelurahan yang menjadi sumber kebakaran. Oleh karena itu, penulis akan melakukan penelitian dengan mengambil judul "Pemanfaatan Pusat dan Basis Graf dalam Mengoptimalkan Pemasangan Sensor Kebakaran".

2. Metode

Penelitian ini merupakan pengembangan dari aplikasi teori graf. Dalam hal ini, pusat dan basis graf digunakan untuk mengoptimalkan letak dan jumlah sensor kebakaran yang perlu dipasang pada suatu wilayah. Graf yang dimaksud di sini adalah graf yang terhubung.

Studi kasus pada penelitian ini yaitu di Kota Baubau Provinsi Sulawesi Tenggara. Sehingga dalam melakukan penelitian ini, data kelurahan di Kota Baubau harus dikumpulkan terlebih dahulu. Kemudian, dengan menggunakan konsep graf dual dari peta, peta tersebut dimodelkan ke dalam bentuk graf. Selanjutnya, dari graf tersebut dilakukan analisa penempatan dan jumlah sensor kebakaran dengan menentukan pusat dan basisnya. Diagram alur dari penelitian ini ditunjukkan pada Gambar 1 berikut.



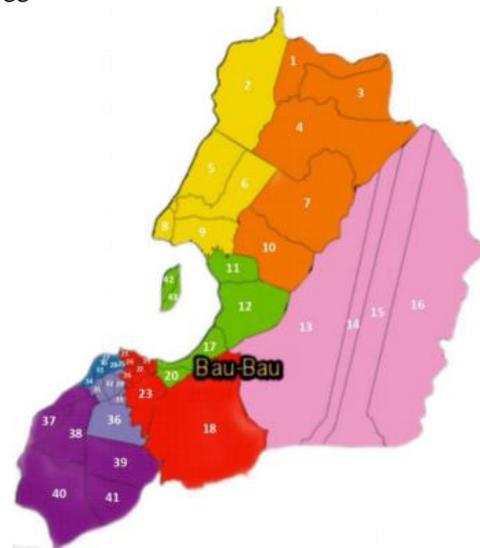
Gambar 1. Alur Penelitian

3. Hasil dan Pembahasan

Pada subbagian ini berisi pembahasan mengenai pemodelan graf suatu wilayah, penentuan pusat dan basis suatu graf, serta memanfaatkan pusat dan basis graf untuk mengoptimalkan pemasangan sensor kebakaran.

3.1 Pemodelan Graf Wilayah Kota Baubau

Wilayah Kota Baubau terdiri atas 43 kelurahan. Berikut ini, pada Gambar 2 merupakan peta wilayah Kota Baubau Provinsi Sulawesi Tenggara.



Gambar 2. Peta Wilayah Kota Baubau Provinsi Sulawesi Tenggara

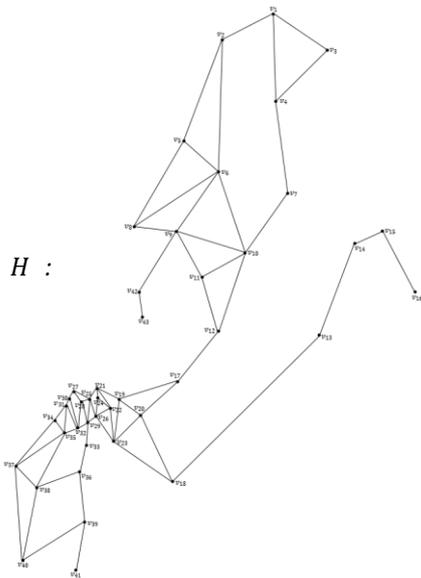
Keterangan dari Gambar 2, kelurahan yang berada pada wilayah Kota Baubau terdiri atas 43 kelurahan sebagai berikut :

Tabel 1. Kelurahan di Kota Baubau Provinsi Sulawesi Tenggara

No.	Nama Kelurahan	No.	Nama Kelurahan
1.	Tampuna	20.	Kadolo
2.	Palabusa	21.	Wale
3.	Kampoenaho	22.	Wangkanapi
4.	Ngkari-ngkari	23.	Bukit Wolio Indah
5.	Kalia-lia	24.	Tomba
6.	Kantalai	25.	Nganganaumala
7.	Waliabuku	26.	Bataraguru
8.	Kolese	27.	Kaobula
9.	Lowu-lowu	28.	Lanto
10.	Liabuku	29.	Wajo
11.	Lakologou	30.	Wameo

No.	Nama Kelurahan	No.	Nama Kelurahan
12.	Waruruma	31.	Tarafu
13.	Kaisabu Baru	32.	Lamangga
14.	Karya Baru	33.	Melai
15.	Bugi	34.	Bone-bone
16.	Gonda Baru	35.	Tanganapada
17.	Kadolomoko	36.	Baadia
18.	Kadolo Katapi	37.	Katobengke
19.	Batulo	38.	Lipu
39.	Waborobo	42.	Sukanayo
40.	Sulaa	43.	Liwuto
41.	Labalawa		

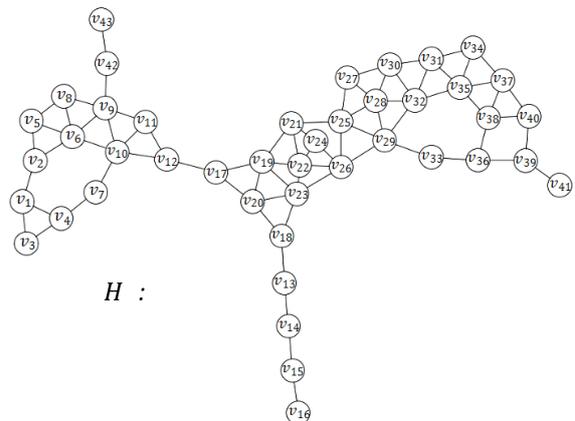
Pemodelan peta wilayah Kota Baubau ke bentuk graf menggunakan konsep graf dual dari peta, yaitu kelurahan direpresentasikan sebagai titik dan dua titik dikatakan bertetangga jika dua kelurahan yang bersesuaian dengan kedua titik tersebut berbatasan langsung dan terdapat jalan yang menghubungkan dua kelurahan tersebut. Pada Gambar 3 berikut merupakan graf dual yang mewakili peta wilayah Kota Baubau .



Gambar 3. Graf Dual Wilayah Kota Baubau Provinsi Sulawesi Tenggara

Model graf wilayah Kota Baubau seperti yang diberikan pada Gambar 3, dapat digambarkan kembali dengan cara mengurutkan titik dan sisinya sehingga kelihatan lebih rapi dan mudah di baca. Model graf kota Baubau yang diberi nama **graf H**, setelah diurutkan dan digambarkan kembali titik dan sisinya dapat dilihat pada Gambar 4. Himpunan titik dan himpunan sisi model graf wilayah kota Baubau adalah

graf $H = (V(H), E(H))$, dengan $V(H)$ dan $E(H)$ berturut turut sebagai berikut:



Gambar 4. Graf Dual Wilayah Kota Baubau Provinsi Sulawesi Tenggara

$$H = (V(H), E(H)),$$

$$V(H) = \left\{ \begin{array}{l} v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, \\ v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, \\ v_{19}, v_{20}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}, v_{26}, \\ v_{27}, v_{28}, v_{29}, v_{30}, v_{31}, v_{32}, v_{33}, v_{34}, \\ v_{35}, v_{36}, v_{37}, v_{38}, v_{39}, v_{40}, v_{41}, v_{42}, \\ v_{43} \end{array} \right\},$$

$$E(H) = \left\{ \begin{array}{l} v_1 v_2, v_1 v_3, v_1 v_4, v_2 v_5, v_2 v_6, \\ v_3 v_4, v_4 v_7, v_5 v_6, v_5 v_8, v_6 v_8, \\ v_6 v_9, v_6 v_{10}, v_7 v_{10}, v_8 v_9, v_9 v_{10}, \\ v_9 v_{11}, v_9 v_{42}, v_{10} v_{11}, v_{14} v_{15}, \\ v_{10} v_{12}, v_{11} v_{12}, v_{12} v_{17}, v_{13} v_{14}, \\ v_{13} v_{18}, v_{15} v_{16}, v_{17} v_{19}, v_{17} v_{20}, \\ v_{18} v_{20}, v_{18} v_{23}, v_{19} v_{20}, v_{19} v_{21}, \\ v_{19} v_{22}, v_{19} v_{23}, v_{20} v_{23}, v_{21} v_{22}, \\ v_{21} v_{24}, v_{21} v_{25}, v_{22} v_{23}, v_{22} v_{24}, \\ v_{22} v_{26}, v_{23} v_{26}, v_{24} v_{26}, v_{25} v_{26}, \\ v_{25} v_{27}, v_{25} v_{28}, v_{25} v_{29}, v_{26} v_{29}, \\ v_{27} v_{28}, v_{27} v_{30}, v_{28} v_{29}, v_{28} v_{30}, \\ v_{28} v_{32}, v_{29} v_{32}, v_{29} v_{33}, v_{30} v_{31}, \\ v_{30} v_{32}, v_{31} v_{32}, v_{31} v_{34}, v_{31} v_{35}, \\ v_{32} v_{35}, v_{33} v_{36}, v_{34} v_{35}, v_{34} v_{37}, \\ v_{35} v_{37}, v_{35} v_{38}, v_{36} v_{38}, v_{36} v_{39}, \\ v_{37} v_{38}, v_{37} v_{40}, v_{38} v_{40}, v_{39} v_{40}, \\ v_{39} v_{41}, v_{42} v_{43} \end{array} \right\}. \tag{I}$$

Graf yang mewakili Gambar 4 adalah graf terhubung H dengan 43 titik dan 73 sisi.

3.2 Menentukan Pusat Wilayah Kota Baubau

Dalam menentukan pusat suatu graf wilayah Kota Baubau, terlebih dahulu dicari eksentrisitas suatu titik. Pengertian eksentrisitas adalah sebagai berikut.

Definisi 1 Misalkan G adalah graf terhubung dan $v \in V(G)$. Maka eksentrisitas titik v ditulis $e(v)$ yakni $e(v) = \max\{d(u, v) : u \in V(G)\}$ [5].

Definisi 2 Misalkan G adalah graf terhubung dan $v \in V(G)$. Maka :

1. Jari-jari graf G ditulis $r(G)$ yakni $r(G) = \min\{e(v) : v \in V(G)\}$,
2. Titik v disebut titik pusat (central vertex) jika $e(v) = r(G)$,
3. Himpunan P disebut pusat graf G jika $P = \{v : v \text{ titik pusat}\}$ [5].

Berdasarkan Definisi 1, eksentrisitas setiap titik graf H pada Gambar 4 adalah sebagai berikut :

$$e(v_1) = \max\{d(v_1, v_1), \dots, d(v_1, v_{43})\} = 13,$$

$$e(v_2) = \max\{d(v_2, v_1), \dots, d(v_2, v_{43})\} = 12,$$

$$e(v_3) = \max\{d(v_3, v_1), \dots, d(v_3, v_{43})\} = 13,$$

dengan cara yang sama diperoleh :

$$e(v_4) = 12, e(v_5) = 12, e(v_6) = 11, e(v_7) = 11,$$

$$e(v_8) = 12, e(v_9) = 11, e(v_{10}) = 10, e(v_{11}) = 10,$$

$$e(v_{12}) = 9, e(v_{13}) = 8, e(v_{14}) = 9, e(v_{15}) = 10,$$

$$e(v_{16}) = 11, e(v_{17}) = 8, e(v_{18}) = 7,$$

$$e(v_{19}) = 7, e(v_{20}) = 7, e(v_{21}) = 7, e(v_{22}) = 7,$$

$$e(v_{23}) = 7, e(v_{24}) = 8, e(v_{25}) = 8, e(v_{26}) = 8,$$

$$e(v_{27}) = 9, e(v_{28}) = 9, e(v_{29}) = 9, e(v_{30}) = 10,$$

$$e(v_{31}) = 11, e(v_{32}) = 11, e(v_{33}) = 10, e(v_{34}) = 12,$$

$$e(v_{35}) = 11, e(v_{36}) = 11, e(v_{37}) = 12,$$

$$e(v_{38}) = 12, e(v_{39}) = 12, e(v_{40}) = 13, e(v_{41}) = 13,$$

$$e(v_{42}) = 12, e(v_{43}) = 13.$$

Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2 diperoleh $r(H) = \min\{e(v) : v \in V(H)\} = 7$ dan titik pusat H adalah titik $v_{18}, v_{19}, v_{20}, v_{21}, v_{22}, v_{23}$. Sehingga, pusat dari graf H adalah $P = \{v : v \text{ titik pusat}\} = \{v_{18}, v_{19}, v_{20}, v_{21}, v_{22}, v_{23}\}$. Keterangan dari masing-masing titik pusat tersebut yaitu, v_{18} (Kelurahan Kadolo Katapi), v_{19} (Kelurahan Batulo), v_{20} (Kelurahan Kadolo), v_{21} (Kelurahan Wale), v_{22} (Kelurahan Wangkanapi) dan v_{23} (Kelurahan Bukit Wolio Indah).

3.3 Menentukan Basis yang Memuat Pusat Graf Wilayah Kota Baubau

Pada subbagian ini dibahas mengenai himpunan pembeda, himpunan pembeda yang merupakan basis, dimensi metrik dan himpunan pembeda yang memuat titik pusat graf H pada Gambar 4. Namun, graf H pada Gambar 4 berbeda dengan jenis-jenis graf khusus yang telah diketahui. Oleh karena itu, untuk memudahkan menentukan

basis dan dimensi metrik graf H terlebih dahulu dibagi menjadi dua subgraf dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Graf H memuat beberapa titik potong di antaranya $v_9, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{17}, v_{18}, v_{39}$ dan v_{42} . Dipilih v_{12} sebagai titik tetap pada graf H dan notasikan c_k dengan tujuan agar $c_k \in S_i \forall i, i = 1, 2$.
2. Terlihat bahwa S_1 dan S_2 masih memuat lebih dari 2 titik potong yang lain, sehingga $|V(S_i)| \geq 4$.

Lebih jelasnya, himpunan titik dan himpunan sisi dari S_1 dan S_2 adalah sebagai berikut.

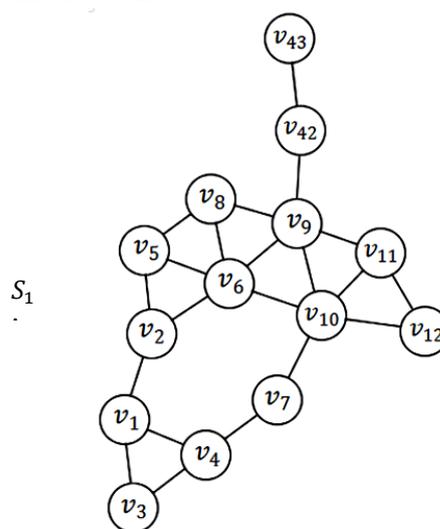
$$V(S_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{12}, v_{42}, v_{43}\}, |V(S_1)| = 14,$$

$$E(S_1) = \left\{ \begin{array}{l} v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_4, \\ v_4v_7, v_5v_6, v_5v_8, v_6v_8, v_6v_9, v_6v_{10}, \\ v_7v_{10}, v_8v_9, v_9v_{10}, v_9v_{11}, v_9v_{42}, \\ v_{10}v_{11}, v_{10}v_{12}, v_{11}v_{12}, v_{42}v_{43} \end{array} \right\}$$

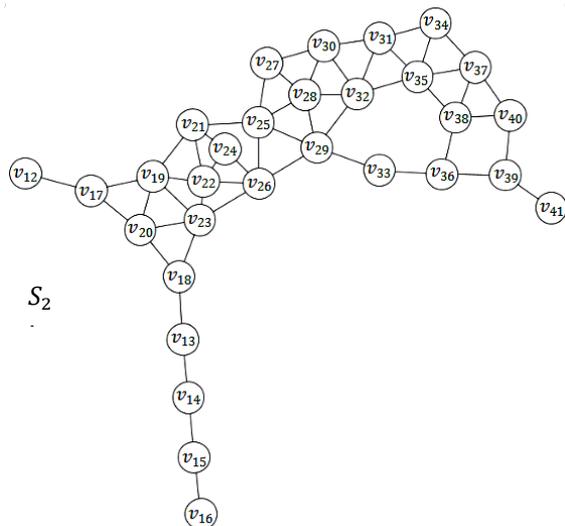
$$V(S_2) = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, \dots, v_{41}\}, |V(S_2)| = 30,$$

$$E(S_2) = \left\{ \begin{array}{l} v_{12}v_{17}, v_{13}v_{14}, v_{13}v_{18}, v_{14}v_{15}, v_{15}v_{16}, \\ v_{17}v_{19}, v_{17}v_{20}, v_{18}v_{20}, v_{18}v_{23}, v_{19}v_{20}, \\ v_{19}v_{21}, v_{19}v_{22}, v_{19}v_{23}, v_{20}v_{23}, v_{21}v_{22}, \\ v_{21}v_{24}, v_{21}v_{25}, v_{22}v_{23}, v_{22}v_{24}, v_{22}v_{26}, \\ v_{23}v_{26}, v_{24}v_{26}, v_{25}v_{26}, v_{25}v_{27}, v_{25}v_{28}, \\ v_{25}v_{29}, v_{26}v_{29}, v_{27}v_{28}, v_{27}v_{30}, v_{28}v_{29}, \\ v_{28}v_{30}, v_{28}v_{32}, v_{29}v_{32}, v_{29}v_{33}, v_{30}v_{31}, \\ v_{30}v_{32}, v_{31}v_{32}, v_{31}v_{34}, v_{31}v_{35}, v_{32}v_{35}, \\ v_{33}v_{36}, v_{34}v_{35}, v_{34}v_{37}, v_{35}v_{37}, v_{35}v_{38}, \\ v_{36}v_{38}, v_{36}v_{39}, v_{37}v_{38}, v_{37}v_{40}, v_{38}v_{40}, \\ v_{39}v_{40}, v_{39}v_{41} \end{array} \right\}$$

Karena $V(S_1), V(S_2) \subset V(H)$ dan $E(S_1), E(S_2) \subset E(H)$, maka S_1 dan S_2 adalah subgraf dari H . Untuk lebih jelasnya, subgraf S_1 dan S_2 masing-masing dapat dilihat pada Gambar 5 dan Gambar 6 berikut.



Gambar 5. Subgraf S_1



Gambar 6. Subgraf S_2

Selanjutnya, akan diuraikan tentang penentuan dimensi metrik graf H dan pembuktian dimensi metriknya.

Proposisi 1 Misalkan graf H dengan himpunan titik dan himpunan sisi seperti yang diberikan pada (1), maka $\dim(H) = 4$.

Bukti : Menurut Chartrand, dkk., 2000, $\dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$. Jadi, $\dim(H) \geq 2$ karena graf H bukan P_n .

Misalkan ambil himpunan $W \subseteq V(H)$ dengan kardinalitas 2. Pandang subgraf S_i dan S_j dari graf H . Bentuk himpunan $W_{P_1} = \{u, v | u, v \in S_i\}$ untuk suatu $i, i \in \{1,2\}$. Karena S_i memuat lebih dari satu blok, maka S_i memuat paling sedikit dua titik potong $c_k, k \geq 2$ dan terdapat $c_k \in S_j$. Sehingga,

$$\exists a, b \in S_j, i \neq j, i, j \in \{1,2\}$$

dengan $d(a, c_k) = d(b, c_k)$

atau $d(a, c_k) + d(c_k, v) = d(b, c_k) + d(c_k, v) \forall v \in W_{P_1}$. Akibatnya,

$$r(a|W_{P_1}) = r(b|W_{P_1}).$$

Jadi, W_{P_1} bukan himpunan pembeda.

Misalkan $W_{P_2} = \{u, w | u \in S_i, w \in S_j\}$ dengan $i \neq j$ dan $i, j \in \{1,2\}$. Karena S_i dan S_j memuat lebih dari satu blok, maka S_i dan S_j memuat paling sedikit dua titik potong. Misalkan titik potong S_i adalah $c_m, m \geq 2$ dan titik potong S_j adalah $c_n, n \geq 2$. Selanjutnya, karena S_j memuat siklus atau lintasan yang melewati titik potong, maka $d(w) \geq 2$. Akibatnya,

$$\forall w \in W_{P_2} \exists u_a, u_b \in S_j \ni d(u_a, w) = d(u_b, w)$$

atau $d(u_a, c_n) + d(c_n, w) = d(u_b, c_n) + d(c_n, w) \forall w \in W_{P_2}$.

Karena $\exists c_k \in S_i \cap S_j$, maka $d(u_a, c_k) + d(c_k, x) = d(u_b, c_k) + d(c_k, x) \forall x \in S_i \cup S_j$.

Akibatnya,

$$d(u_a, u) = d(u_b, u).$$

Sehingga,

$$r(u_a|W_{P_2}) = r(u_b|W_{P_2}).$$

Jadi, W_{P_2} bukan himpunan pembeda.

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $W \subseteq V(H)$ dengan $|W| = 2$, maka W bukan himpunan pembeda bagi graf H . Jadi, $\dim(H) \geq 3$.

Misalkan himpunan $W_{Q_1} = \{u, v, w | u, v, w \in S_i\}$ untuk suatu $i, i \in \{1,2\}$. Karena S_i memuat lebih dari satu blok, maka S_i memuat paling sedikit dua titik potong $c_k, k \geq 2$ dan terdapat $c_k \in S_j$. Sehingga,

$$\exists a, b \in S_j, i \neq j, i, j \in \{1,2\}$$

dengan

$$d(a, c_k) = d(b, c_k)$$

atau

$$d(a, c_k) + d(c_k, w) = d(b, c_k) + d(c_k, w) \forall w \in W_{Q_1}$$

Akibatnya,

$$r(a|W_{Q_1}) = r(b|W_{Q_1}).$$

Jadi, W_{Q_1} bukan himpunan pembeda.

Selanjutnya, misalkan $W_{Q_2} = \{u, v, w | u, v \in S_i, w \in S_j\}$ dengan $i \neq j$ dan $i, j \in \{1,2\}$. Karena S_i dan S_j memuat lebih dari satu blok, maka S_i dan S_j memuat paling sedikit dua titik potong. Misalkan titik potong S_i adalah $c_m, m \geq 2$ dan titik potong S_j adalah $c_n, n \geq 2$. Selanjutnya, karena S_j memuat siklus atau lintasan yang melewati titik potong, maka $d(w) \geq 2$.

Akibatnya,

$$\forall w \in W_{Q_2} \exists u_a, u_b \in S_j \ni d(u_a, w) = d(u_b, w)$$

atau $d(u_a, c_n) + d(c_n, w) = d(u_b, c_n) + d(c_n, w) \forall w \in W_{Q_2}$.

Karena $\exists c_k \in S_i \cap S_j$, maka

$$d(u_a, c_k) + d(c_k, x) = d(u_b, c_k) + d(c_k, x) \forall x \in S_i \cup S_j$$

Akibatnya,

$d(u_a, u) = d(u_b, u)$ dan $d(u_a, v) = d(u_b, v)$. Sehingga,

$$r(u_a|W_{Q_2}) = r(u_b|W_{Q_2}).$$

Jadi, W_{Q_2} juga bukan himpunan pembeda.

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $W \subseteq V(H)$ dengan $|W| = 3$, maka W bukan himpunan pembeda bagi graf H . Akibatnya, $\dim(H) \geq 4$. Sebelumnya telah diketahui bahwa H memiliki titik pusat yaitu $v_{18}, v_{19}, v_{20}, v_{21}, v_{22}$ dan v_{23} karenanya dapat dikonstruksi himpunan terurut W sebagai cikal bakal himpunan pembeda. Langkah-langkah mengkonstruksi himpunan W sebagai berikut.

1. Konstruksi W dengan $|W| = 3$ yang anggotanya berada pada subgraf yang berbeda, memuat titik pusat yang bukan merupakan titik potong dan untuk setiap titik di W jaraknya terhadap titik potong c_k berbeda.
2. Konstruksi W baru sebut W' dengan $W' = W \cup \{a\}$ dan a memenuhi $r(a|W) = r(b|W)$ dan $d(a, c_k) = d(b, c_k)$ untuk suatu $b \in V(H)$.
3. Jika $\forall u, v \in V(H)$, $u \neq v$, $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W adalah himpunan pembeda. Namun, jika $\exists x, y \in V(H) \ni r(x|W) = r(y|W)$, ulangi dari langkah pertama.

Misalkan ambil $W = \{v_3, v_{20}, v_{27}\} \ni d(v_3, c_k) \neq d(v_{20}, c_k) \neq d(v_{27}, c_k)$. Perhatikan bahwa terdapat v_{37} dan v_{38} sedemikian sehingga $r(v_{37}|W) = r(v_{38}|W)$ dan $d(v_{37}, c_k) = d(v_{38}, c_k)$. Selanjutnya, dibentuk himpunan baru sebut $W_1 = \{v_3, v_{20}, v_{27}, v_{38}\}$. Karena $r(u|W_1) \neq r(v|W_1) \forall u, v \in V(H)$, maka W_1 adalah himpunan pembeda dari H . Dengan cara yang sama, dapat diperoleh basis-basis yang lain pada graf H diantaranya, yaitu $W_2 = \{v_3, v_{13}, v_{27}, v_{38}\}$, $W_3 = \{v_3, v_{21}, v_{32}, v_{36}\}$, $W_4 = \{v_3, v_{22}, v_{30}, v_{36}\}$ dan $W_5 = \{v_3, v_9, v_{20}, v_{27}, v_{37}\}$.

Dengan demikian, diperoleh bahwa batas bawah dimensi metrik graf H adalah 4 atau $\dim(H) \geq 4$. Berdasarkan definisi dimensi metrik pada [3], diperoleh $\dim(H) \leq 4$. Akibatnya, diperoleh $\dim(H) = 4$. Hal ini berarti bahwa, kardinalitas minimum dari semua himpunan pembeda yang mungkin untuk graf H pada Gambar 4 adalah 4. Dengan demikian, himpunan pembeda dengan kardinalitas 4 adalah himpunan pembeda minimum atau $W_1 = \{v_3, v_{20}, v_{27}, v_{38}\}$ adalah salah satu basis dari H , dengan berturut-turut v_3 (Kelurahan Kampoenaho), v_{20} (Kelurahan Kadolo), v_{27}

(Kelurahan Kaobula), v_{38} (Kelurahan Lipu). Pemilihan basis W_1 sebagai tempat paling strategis karena terdapat fasilitas penting yaitu kantor walikota dan juga memuat titik pusat model graf Kota Baubau.

3.4 Pemanfaatan Pusat dan Basis Graf untuk Mengoptimalkan Pemasangan Sensor Kebakaran pada Wilayah Kota Baubau

Misalkan penentuan lokasi dan jumlah sensor kebakaran di wilayah Kota Baubau ditempatkan pada basis yang memuat pusat graf, salah satunya yaitu $W_1 = \{v_3, v_{20}, v_{27}, v_{38}\}$ dengan $v_3, v_{20}, v_{27}, v_{38}$ menyatakan Kelurahan Kampoenaho, Kelurahan Kadolo, Kelurahan Kaobula dan Kelurahan Lipu berturut-turut. Misalkan terjadi kebakaran di titik v_{22} yaitu Kelurahan Wangkanapi, sensor kebakaran yang berada di masing-masing titik pada W_1 akan mendeteksi bahwa api bersumber dari kelurahan yang berjarak tujuh kelurahan dari Kelurahan Kampoenaho, berjarak dua kelurahan dari Kelurahan Kadolo, berjarak tiga kelurahan dari Kelurahan Kaobula dan berjarak lima kelurahan dari Kelurahan Lipu. Dari informasi tersebut maka dapat ditemukan bahwa sumber api berasal dari kelurahan yang ditunjukkan oleh koordinat $(7,2,3,5)$ terhadap W_1 . Karena W_1 merupakan basis, maka dapat dilihat bahwa satu-satunya kelurahan yang diberikan oleh koordinat tersebut adalah Kelurahan Wangkanapi.

Selanjutnya, sensor kebakaran diletakkan pada basis yang tidak memuat pusat. Salah satunya yaitu $W_2 = \{v_3, v_{13}, v_{27}, v_{38}\}$ dengan $v_3, v_{13}, v_{27}, v_{38}$ menyatakan Kelurahan Kampoenaho, Kelurahan Kaisabu Baru, Kelurahan Kaobula dan Kelurahan Lipu. Misalkan terjadi kebakaran di titik v_{22} yaitu Kelurahan Wangkanapi, sensor kebakaran yang berada di masing-masing titik pada W_2 akan mendeteksi bahwa api bersumber dari kelurahan dengan koordinat $(7,3,3,5)$ terhadap W_2 . Karena W_2 merupakan basis, maka dapat dilihat bahwa satu-satunya kelurahan yang diberikan oleh koordinat tersebut adalah Kelurahan Wangkanapi.

Sensor kebakaran yang diletakkan pada titik pusat v_{20} dan v_{13} masing-masing berjarak dua dan tiga kelurahan dari sumber kebakaran v_{22} . Jarak titik pusat v_{20} terhadap sumber kebakaran v_{22} lebih dekat dibandingkan dengan jarak v_{13} ke sumber kebakaran v_{22} . Sehingga, apabila akan dilakukan pemadaman kebakaran, maka mobil pemadam kebakaran yang diletakkan pada titik v_{20} akan lebih cepat sampai ke sumber kebakaran v_{22} sehingga proses evakuasi juga akan lebih cepat.

Hal yang berbeda terjadi ketika sensor kebakaran dipasang pada $W' = \{v_3, v_{16}, v_{41}, v_{43}\}$. Untuk $W' =$

$\{v_3, v_{16}, v_{41}, v_{43}\}$, diperoleh $r(v_{37}|W') = r(v_{38}|W') = (12,10,3,12)$. Sehingga, jika sensor kebakaran mengidentifikasi bahwa kebakaran berasal dari kelurahan dengan koordinat terhadap W' adalah $(12,10,3,12)$, maka kelurahan yang dinyatakan dengan koordinat tersebut ada dua yakni Kelurahan Katobengke dan Kelurahan Lipu. Akibatnya, sensor kebakaran tidak dapat menemukan lokasi sumber kebakaran dengan tepat. Hal ini dikarenakan W' bukan himpunan pembeda dari graf H pada Gambar 4. Oleh karena itu, penempatan sensor kebakaran dan mobil pemadam kebakaran harus diletakkan pada himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum yang memuat titik pusat.

4. Kesimpulan dan Saran

Penentuan area yang paling representatif pada suatu wilayah untuk penempatan sensor dan mobil pemadam kebakaran adalah penentuan titik yang paling representatif pada model graf wilayah melalui konsep pusat graf yang juga merupakan anggota basis graf.

Pada model graf wilayah Kota Baubau, kelurahan dinyatakan sebagai titik dan sisi menyatakan dua kelurahan yang berbatasan dan terdapat jalan yang menghubungkannya. Pada penelitian ini, titik yang paling representatif adalah titik yang merupakan kelurahan Kelurahan Kampoenaho, Kelurahan Kadolo, Kelurahan Kaobula dan Kelurahan Lipu. Oleh karena itu, penempatan sensor yang paling efisien dan paling representatif adalah di empat kelurahan tersebut.

Saran untuk peneliti selanjutnya, salah satu batasan masalah pada penelitian ini adalah pada pomodelan grafnya, dua titik dikatakan bertetangga jika dua kelurahan yang bersesuaian dengan kedua titik tersebut berbatasan dan terdapat jalan yang menghubungkan dua kelurahan tersebut. Penelitian ini dapat dikembangkan lebih lanjut dengan mengabaikan batasan masalah tersebut.

Ucapan Terimakasih. Penulis mengucapkan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada dosen pembimbing dan dosen penguji atas segala arahan dan masukannya sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Asmiati, dkk. (2019). Dimensi Metrik Hasil Operasi Tertentu pada Graf Petersen Diperumum. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 16(2), 87-93.
- [2] Chartrand, G. et al. (2000). Resolvability in Graphs and the Metric Dimension of a Graph. *Discrete Applied Mathematics*, 105, 99-113.

- [3] Chartrand, G., & Zhang, P. (2003). The Theory and Applications of Resolvability in Graph: A Survey. *Congressus Numerantium*, 160, 47-68.
- [4] Harary, F., & Melter, R. A. (1976). *On the Metric Dimension of a Graph*. *Ars Comb*, 2, 191-195.
- [5] Hasmawati. (2020). *Pengantar dan Jenis-Jenis Graf (I)*. UPT Unhas Press, Makassar.
- [6] Shulhany, dkk. (2021). Dimensi Metrik pada Graf Calendula $(Cl_{3,n})$. *Asimetris: Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains*, 2(1), 7-9.
- [7] Slater, P. J. (1975). Leaves Trees. *Proceeding of International Conference On Research, Implementation And Education Of Mathematics And Sciences Proceeding of the 6th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Congressus Numerantium*, 549-559.
- [8] Slater, P. J. (1988). Dominating and Reference Sets in a Graph. *J. Math. Phys. Sci*, 22, 445-455.
- [9] Utomo, T. dan Dewi, N.R. (2018). Dimensi Metrik Graf Amal (nK_m) . *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 15(1), 71-77.
- [10] Wahyudi, S. (2018). Aplikasi Dimensi Metrik Untuk Meminimalkan Pemasangan Sensor Kebakaran Sebuah Gedung. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 15(2), 89-96.

Diterima tanggal 26 September 2022
Diterbitkan online tanggal 30 Desember 2022