

ANALISIS MODEL SIR MENGGUNAKAN METODE EULER DAN RUNGE-KUTTA ORDE 4

Andi Nurkifayah

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
E-mail: nurkifayahandi@gmail.com

Edi Cahyono¹⁾, Mukhsar²⁾ dan Asrul Sani³⁾

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: ¹⁾edi.cahyono@uho.ac.id, ²⁾mukhsar@uho.ac.id, ³⁾sani.asrul@uho.ac.id

ABSTRAK

Model matematika suatu fenomena adalah suatu ekspresi matematika yang diturunkan dari fenomena tersebut. Covid-19 adalah suatu fenomena penyebaran penyakit, model matematika yang dapat menggambarkan penyebaran Covid-19 adalah model SIR dengan membagi populasi menjadi tiga subpopulasi, yaitu populasi rentan (S), terinfeksi (I), dan sembuh (R). Tujuan penelitian ini adalah untuk mengaplikasikan model endemi SIR pada penyebaran Covid-19 dengan populasi tidak konstan dan untuk memperoleh analisis titik ekuilibrium model serta gambaran simulasi numerik ketika $R > 1$ dan ketika $R < 1$ menggunakan metode Euler dan metode Runge-Kutta orde 4. Penelitian ini dilakukan dengan mengasumsikan dan menyederhanakan model endemi SIR pada populasi tidak konstan. Kemudian mencari titik ekuilibrium dan bilangan reproduksi dasar (R) dan menentukan kestabilan titik ekuilibrium, serta melakukan simulasi numerik menggunakan metode Euler dan metode Runge-Kutta orde 4 dengan bantuan perangkat lunak Matlab. Model endemi SIR yang diaplikasikan pada populasi tidak konstan adalah model endemi sederhana oleh McKendrick dan Kermarck, dan dalam populasi tidak konstan dengan mengasumsikan jumlah kelahiran lebih besar dari kematian dan adanya kematian akibat Covid-19. Berdasarkan model SIR pada populasi tidak konstan diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik serta bilangan reproduksi dasar R . Hasil simulasi numerik yang diperoleh pada populasi tidak konstan ketika $R > 1$, menunjukkan populasi rentan akan terus terinfeksi dan sembuh dan menandakan penyakit akan terus ada pada populasi. Ketika $R < 1$, menunjukkan bahwa populasi terinfeksi akan sembuh dan akan menghilang, sehingga hanya populasi rentan yang akan terus tumbuh.

Kata Kunci: Model SIR, Metode Euler, Metode Runge-Kutta orde 4, COVID-19, Bilangan Reproduksi Dasar (R), Titik Ekuilibrium .

ABSTRACT

The mathematical model of a phenomenon is a mathematical expression derived from the phenomenon. Covid-19 is a phenomenon of the spread of disease, a mathematical model that can describe the spread of Covid-19 is the SIR model by dividing the population into three subpopulations, namely the susceptible population (S), infected (I), and cured (R). The purpose of this study is to apply the SIR endemic model to the spread of COVID19 with a non-constant population and to obtain an analysis of the equilibrium point of the model and a numerical simulation description when $R > 1$ and when $R < 1$ using the Euler method and the 4th-order Runge-Kutta method. This research was conducted by assuming and simplifying the SIR endemic model at nonconstant populations. Then look for the equilibrium point and the basic reproduction number (R) and determine the stability of the equilibrium point, and perform numerical simulations using the Euler method and the 4th-order Runge-Kutta method with the help of Matlab software. The SIR endemic model applied to the nonconstant population is the simple endemic model by McKendrick and Kermarck, and in the non-constant population assuming the number of births is greater than death and the presence of deaths due to Covid-19. Based on the SIR model in the non-constant population, two equilibrium points are obtained, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point and the basic reproduction number (R). The numerical simulation results obtained for the population are not constant when $R > 1$, indicating that the susceptible population will continue to be infected and recover and indicate that the disease will continue to exist in the population. When $R < 1$, indicates that the infected population will recover and will disappear, so that only the vulnerable population will continue to grow.

Key words: SIR model, COVID-19, basic reproduction number (R), Euler Method, Runge-Kutta orde 4, equilibrium point.

1. Pendahuluan

Model matematika suatu fenomena adalah suatu ekspresi matematika yang diturunkan dari fenomena tersebut. Ekspresi model dapat berupa persamaan, sistem persamaan atau ekspresi-ekspresi matematika yang lain seperti fungsi maupun relasi. Sedangkan, Pemodelan Matematika adalah proses membawa fenomena ke dalam model matematika. Dalam memperoleh, membuat, mengembangkan atau menurunkan model matematika dapat melibatkan asumsi-asumsi, pendekatan-pendekatan maupun pembatasan-pembatasan yang didasarkan atas eksperimen maupun observasi terhadap fenomena sebenarnya (Cahyono, 2013). Pemodelan matematika juga digunakan sebagai alat untuk mengekstraksi pandangan tentang penyakit menular, pembentukan model dan kemungkinan simulasi memungkinkan untuk menganalisis atau meramalkan tingkat penyebaran penyakit (Raza *et al.*, 2019). Bentuk model matematika penyebaran penyakit yang banyak digunakan adalah model persamaan diferensial.

Penyakit menular dapat menjadi perhatian utama masyarakat, pemodelan penyakit menular sangat penting dilakukan untuk meramalkan terjadinya sebuah wabah penyakit (Rifhat *et al.*, 2021). Wabah penyakit yang sedang terjadi saat ini adalah virus corona. *Coronavirus* adalah suatu kelompok virus yang dapat menyebabkan penyakit pada hewan atau manusia. Beberapa jenis *coronavirus* diketahui menyebabkan infeksi saluran nafas pada manusia mulai dari batuk pilek hingga yang lebih serius seperti *Middle East Respiratory Syndrome* (MERS) dan *Severe Acute Respiratory Syndrome* (SARS), *coronavirus* jenis baru yang ditemukan menyebabkan penyakit Covid-19 (Pasaribu *et al.*, 2020).

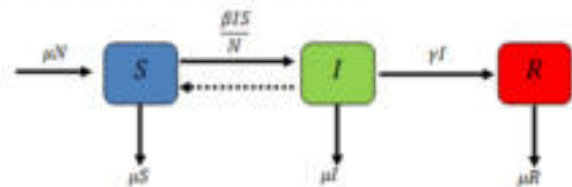
Model matematika yang dapat menggambarkan penyebaran penyakit menular dikenal sebagai model epidemiologi (Macias-Diaz *et al.*, 2021). Model epidemiologi merupakan sarana yang dapat digunakan untuk mempelajari pola penyebaran penyakit. Salah

satu model matematika yang dapat menggambarkan proses penyebaran Covid-19 adalah model epidemiologi SIR dimana suatu populasi dibagi menjadi 3 subpopulasi yaitu subpopulasi S (*susceptible*) berisi populasi yang rentan terhadap penyakit Covid-19, I (*infectious*) berisi individu yang sakit dan dapat menularkan penyakit, R (*recovered*) berisi individu yang telah sembuh dan memiliki kekebalan terhadap virus corona.

TINJAUAN PUSTAKA

Model Endemi SIR

Model endemi SIR adalah model penyebaran dengan adanya penambahan dan pengurangan dalam subpopulasinya. Skema model endemi SIR dibagi menjadi tiga kelas yaitu kelas S (*Susceptible*), I (*Infectious*) dan R (*Recovered*), seperti diuraikan pada Gambar 1



Gambar 1: Skema Penyebaran Model Endemi SIR

Model matematika berdasarkan Gambar 1 diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu N - \mu S - \frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R \end{aligned} \tag{1}$$

untuk $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$.

Proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$x_1(t) = \frac{S(t)}{N}, \quad x_2(t) = \frac{I(t)}{N}, \quad x_3(t) = \frac{R(t)}{N}$$

sehingga Persamaan (1) dapat dikonstruksi ulang menjadi Persamaan (2) berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mu - \mu x_1 - \beta x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \beta x_1 x_2 - \gamma x_2 - \mu x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \gamma x_2 - \mu x_3 \end{aligned} \tag{2}$$

dengan $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 1$.

Untuk melakukan analisis model pada populasi konstan Persamaan (2) dapat direduksi menjadi dua persamaan

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(\mathbf{x}) = \mu - \mu x_1 - \beta x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(\mathbf{x}) = \beta x_1 x_2 - \gamma x_2 - \mu x_2 \end{aligned} \quad (3)$$

untuk $x_3(t) = 1 - x_1(t) - x_2(t)$

t adalah waktu, β adalah laju infeksi, μ adalah laju kelahiran dan kematian alami individu, γ adalah laju kesembuhan.

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 1.1 (Anton & Rorres, 2014)

Jika A adalah sebuah Matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak-nol \mathbf{x} pada R^n disebut vektor eigen (*eigen vector*) dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari \mathbf{x} .

Titik Ekuilibrium

Definisi 1.2 (Hale & Kocak, 1991)

Titik $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$ disebut titik ekuilibrium atau titik krisis dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, jika $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Titik ekuilibrium dapat diperoleh dengan $\frac{df}{dt} = \mathbf{0}$, sehingga diperoleh titik ekuilibrium dari sistem persamaan (4) yaitu

- Titik ekuilibrium $a_1(1,0)$ atau dikenal sebagai titik ekuilibrium bebas penyakit.
- Titik ekuilibrium $a_2\left(\frac{\gamma+\mu}{\beta}, \frac{\mu(\beta-\mu-\gamma)}{\beta(\mu+\gamma)}\right)$ atau dikenal sebagai titik ekuilibrium endemik.

Linierisasi

Kestabilan titik ekuilibrium dari sistem (3) dapat ditentukan dengan cara melakukan linierisasi di titik ekuilibriumnya.

Definisi 1.3 (Perko, 2001)

Diberikan $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ titik ekuilibrium sistem nonlinier. Selanjutnya $\dot{\mathbf{u}} = J_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$ disebut linierisasi dari sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ pada titik \mathbf{a} . Titik $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik jika bagian dari semua nilai eigen $J_{\mathbf{a}}$ tidak nol.

Linearisasi dari sistem persamaan (3) dapat dilakukan menggunakan deret Taylor orde 1 disekitar titik ekuilibrium $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(\mathbf{a}) + \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) \\ &\quad + \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_2}(x_2 - a_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(\mathbf{a}) + \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) \\ &\quad + \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_2}(x_2 - a_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Misalkan $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ dan derivatifnya $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ sehingga persamaan (4) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= f_1(\mathbf{a}) + \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_1}(u_1) + \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_2}(u_2) \\ &\quad + \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_3}(u_3) \\ \frac{du_2}{dt} &= f_2(\mathbf{a}) + \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_1}(u_1) + \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_2}(u_2) \\ &\quad + \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_3}(u_3) \end{aligned} \quad (5)$$

Persamaan (5) dapat ditulis dalam bentuk matriks dan vektor berikut

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ f_2(\mathbf{a}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Berdasarkan Definisi 1.2 $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, maka persamaan (6) dapat diuraikan pada persamaan (7) berikut

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

atau

$$\dot{\mathbf{u}} = J_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$$

Berdasarkan Definisi 1.3, sistem persamaan (7) dikatakan linierisasi dari sistem nonlinier. Apabila semua nilai eigen dari matriks $J_{\mathbf{a}}$ tak nol, maka kestabilan sistem dapat dilihat pada Teorema berikut

Teorema 1.1 (Layek, 2015)

Diberikan matriks Jacobian J_a dari sistem nonlinier

1. Titik ekuilibrium a dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika semua $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, j$ dari matriks J_a .
2. Titik ekuilibrium a dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen dengan $Re(\lambda_i) > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, j$ dari matriks J_a .

Linierisasi kestabilan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian sistem (3) yaitu

a. Linierisasi di titik ekuilibrium $a_1(1,0)$

Matriks Jacobian di titik $a_1(1,0)$ yaitu

$$J_{a_1} = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - \gamma - \mu \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik (nilai eigen) dari matriks J_{a_1}

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - J_{E_0}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 \\ 0 & \lambda - \beta + \gamma + \mu \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda + \mu)(\lambda - \beta + \gamma + \mu) &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = \beta - \gamma - \mu$, kedua nilai eigen λ_1 dan λ_2 bernilai real. Lebih dari itu, karena $\mu > 0$, maka $\lambda_1 < 0$. Oleh karena itu, kestabilan titik $E_0(1,0)$ tinggal diselidiki untuk nilai λ_2 . Bila $\lambda_2 < 0$ maka $E_0(1,0)$ stabil asimtotik. Sebaliknya bila $\lambda_2 > 0$, $E_0(1,0)$ tidak stabil. Di sisi lain, $\lambda_2 < 0$ ekuivalen dengan $\beta < \gamma + \mu$, sedangkan $\lambda_2 > 0$ ekuivalen dengan $\beta > \gamma + \mu$.

b. Linierisasi di titik ekuilibrium

$$a_2 \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu(\beta - \mu - \gamma)}{\beta(\mu + \gamma)} \right)$$

Matriks Jacobian di titik $a_2 \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu(\beta - \mu - \gamma)}{\beta(\mu + \gamma)} \right)$ yaitu

$$J_{a_2} = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\gamma + \mu} & -\gamma - \mu \\ \frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\gamma + \mu} & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik (nilai eigen) dari matriks J_{a_2}

$$\det(\lambda I - J_{E_1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda + \mu + \frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\gamma + \mu} & -\gamma - \mu \\ \frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\gamma + \mu} & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Jika nilai $A = \mu^2\beta^2 - 8\gamma\mu^2\beta + 4\mu\gamma^3 + 12\mu^2\gamma^2 - 4\mu\beta\gamma^2 + 12\gamma\mu^3 - 4\mu^3\beta + 4\mu^4$ Sehingga diperoleh

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu\beta + \sqrt{A}}{\gamma + \mu} \right), \lambda_4 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu\beta - \sqrt{A}}{\gamma + \mu} \right),$$

Titik ekuilibrium $a_2 \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu(\beta - \mu - \gamma)}{\beta(\mu + \gamma)} \right)$, dapat dikatakan stabil asimtotik apabila bagian real dari parameter $\lambda_3, \lambda_4 < 0$, dan tidak stabil apabila $\lambda_3 > 0$ atau $\lambda_4 > 0$.

Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Untuk mengetahui tingkat penyebaran pada suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang bisa digunakan dalam masalah penyebaran penyakit adalah bilangan reproduksi dasar (R_0). Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah potensi penularan penyakit pada populasi rentan atau rata-rata jumlah individu yang terinfeksi secara langsung oleh seseorang penderita selama masa penularannya bila termasuk dalam populasi yang seluruhnya masih rentan (Hethcote, 2000).

R_0 adalah nilai yang menunjukkan apakah penyebaran penyakit menjadi endemi atau tidak endemi pada suatu populasi (Sitinjak, 2021), dengan syarat

- 1) $R_0 \leq 1$ menyatakan bebas penyakit mengindikasikan bahwa suatu penyakit menular pada suatu ketika akan berhenti mewabah bahkan menghilang dengan sendirinya, atau laju penularan suatu penyakit lebih lambat.
- 2) $R_0 > 1$ menyatakan endemi atau mengindikasikan bahwa jumlah individu terinfeksi akan terus bertambah hingga mencapai titik ekuilibrium endemiknya, atau laju penularan suatu penyakit lebih cepat.

Bilangan reproduksi dasar (R_0) dari sistem (1) yaitu

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}$$

Metode Euler

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{aligned} \quad (8)$$

Misalkan

$$x_i = x(t_i) \text{ dan } y_i = y(t_i)$$

adalah hampiran nilai x dan y di t_i yang dihitung dengan metode Euler. Dalam hal ini

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

Pada Persamaan (9) menyatakan metode Euler atau metode Euler-Cauchy

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= x(t_i) + hf(x_i, y_i) \\ y(t_{i+1}) &= y(t_i) + hg(x_i, y_i) \end{aligned} \quad (9)$$

dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n$. (Chapra & Canale, 2010).

Metode Runge-Kutta Orde 4 (RK4)

Metode Runge-kutta dalam penyelesaian persamaan diferensial yang banyak digunakan dan juga dapat memberikan ketelitian yang tinggi adalah Metode Runge-kutta orde 4 atau (RK4). Bentuk umum metode Runge-Kutta orde 4 klasik untuk menyelesaikan Persamaan (8) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{aligned}$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_2, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(t_i + h, x_i + k_3, y_i + k_3)$$

dan

$$l_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$l_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}l_1, y_i + \frac{1}{2}l_1\right)$$

$$l_3 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}l_2, y_i + \frac{1}{2}l_2\right)$$

$$l_4 = hf(t_i + h, x_i + l_3, y_i + l_3)$$

Semua harga k/l berhubungan secara rekursif, artinya k_1/l_1 muncul dalam persamaan untuk k_2/l_2 , yang muncul lagi pada persamaan k_3/l_3 dan seterusnya, h adalah langkah waktu (Chapra & Canale, 2010).

2. Metode Penelitian

Metode penelitian yang diterapkan dalam penelitian ini agar mencapai tujuan penelitian adalah sebagai berikut:

1. Mengaplikasikan model endemi SIR penyebaran Covid-19 pada suatu populasi
 - a. Mengasumsikan model matematika berdasarkan fakta-fakta Covid-19.
 - b. Menentukan variabel dan parameter yang digunakan pada model matematika.
 - c. Mengkontruksi ulang model matematika.
2. Analisis model matematika
 - a. Mencari titik ekuilibrium pada sistem persamaan.
 - b. Menentukan kestabilan titik ekuilibrium dengan cara melakukan linierisasi disekitar titik ekuilibrium.
3. Simulasi model

Simulasi model dilakukan dengan menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) dan simulasi model dengan menggunakan metode Euler dan Runge-Kutta orde 4 yang diimplementasikan pada *software* Matlab, kemudian menginterpretasikan hasil grafik yang diperoleh dari simulasi numerik. Simulasi model dilakukan untuk melihat kestabilan populasi S (*susceptible*), I (*infectious*), R (*recovered*) ketika $R_0 > 1$ dan ketika $R_0 < 1$.

3. Hasil dan Pembahasan

Klasifikasi infeksi Covid-19 dibedakan menjadi tiga subpopulasi yaitu variabel S (*susceptible*) adalah kelompok individu rentan atau individu yang belum pernah terinfeksi Covid-19 termasuk Pasien dalam Pengawasan (PdP) dan Orang dalam Pemantauan (OdP); variabel I (*infectious*) adalah kelompok individu

yang sakit dan dapat menularkan penyakit termasuk Orang terinfeksi Tanpa Gejala (OTG) dan orang terinfeksi dengan gejala; dan variabel R (*recovered*) adalah kelompok individu yang telah sembuh dari Covid-19 dan memiliki kekebalan terhadap Virus Corona. Berdasarkan fakta penyakit Covid-19 dapat mengakibatkan kematian, hal ini mengakibatkan laju kematian pada populasi terinfeksi lebih besar dari populasi rentan dan sembuh, berikut beberapa asumsi yang dapat membentuk model endemi SIR pada populasi tidak konstan:

- 1) Diasumsikan jumlah populasi cukup besar.
- 2) Diasumsikan tingkat kelahiran atau adanya individu baru dalam populasi akan menjadi populasi rentan.
- 3) Populasi rentan akan meningkat seiring bertambahnya individu kedalam suatu populasi dan berkurangnya kekebalan tubuh yang disebabkan oleh infeksi alam yang menyerang tubuh.
- 4) Populasi yang terinfeksi akan meningkat dengan bertambahnya kontak dengan individu dari populasi rentan dan diasumsikan penyakit dapat mengakibatkan kematian pada populasi yang terinfeksi.
- 5) Individu yang terinfeksi diasumsikan dapat kembali sembuh seiring bertambahnya waktu, sehingga individu yang terinfeksi akan pulih dan menjadi populasi yang memiliki kekebalan tubuh yang lebih baik, sehingga laju kematian alami pada populasi sembuh lebih rendah dari populasi rentan.

Adapun variabel-variabel dan parameter-parameter yang digunakan dalam penyebaran penyakit Covid-19 pada populasi tidak konstan diuraikan pada Tabel 1 berikut:

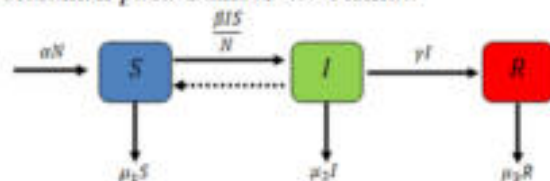
Tabel 1: Arti Variabel dan Parameter dalam Populasi Tidak Konstan

Variabel dan parameter	Keterangan
$S(t)$	Populasi manusia rentan penyakit terhadap waktu $t (\geq 0)$
$I(t)$	Populasi manusia terinfeksi terhadap waktu $t (\geq 0)$
$R(t)$	Populasi manusia sembuh terhadap waktu $t (\geq 0)$

$N(t)$	Total populasi tak konstan terhadap waktu $t (\geq 0)$
α	Laju kelahiran pada populasi rentan ($0 \leq \alpha \leq 1$)
μ_1	Laju kematian alami pada populasi rentan ($0 \leq \mu_1 \leq 1$)
μ_2	Laju kematian alami dan kematian akibat penyakit ($0 \leq \mu_2 \leq 1$)
μ_3	Laju kematian alami populasi sembuh ($0 \leq \mu_3 \leq 1$)
γ	Laju kesembuhan terhadap penyakit ($0 \leq \gamma \leq 1$)

Skema penyebaran dan model matematika

Berdasarkan asumsi model matematika sebelumnya, maka skema penyebaran model endemi SIR pada populasi tidak konstan dibagi menjadi tiga kelas yaitu kelas S (*Susceptible*), I (*Infectious*) dan R (*Recovered*), seperti diuraikan pada Gambar 4.7 berikut:



Gambar 2: Skema Penyebaran Model Endemi SIR pada Populasi Tidak Konstan Model matematika yang dibentuk berdasarkan Gambar 2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \alpha N - \mu_1 S - \frac{\beta IS}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \mu_2 I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu_3 R \end{aligned} \tag{9}$$

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t).$$

Dengan mengasumsikan jumlah populasi awal pada populasi adalah N_1 , maka Proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan sebagai

$$x_1(t) = \frac{S(t)}{N_1}, x_2(t) = \frac{I(t)}{N_1}, x_3(t) = \frac{R(t)}{N_1}$$

sehingga Persamaan (9) dapat dikonstruksi ulang menjadi Persamaan (10)

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha - \mu_1 x_1 - \beta x_1 x_2$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= \beta x_1 x_2 - (\gamma + \mu_2)x_2 & (10) \\ \frac{dx_3}{dt} &= \gamma x_2 - \mu_3 x_3 \end{aligned}$$

dimana ukuran populasi tidak konstan sama dengan $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = P(t)$ untuk setiap waktu t .

Analisis model matematika

Persamaan (10), dapat kita tulis dalam Persamaan (11) berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(\mathbf{x}) = \alpha - \mu_1 x_1 - \beta x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(\mathbf{x}) = \beta x_1 x_2 - (\gamma + \mu_2)x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(\mathbf{x}) = \gamma x_2 - \mu_3 x_3 \end{aligned} \quad (11)$$

dengan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

1) Titik ekuilibrium

Titik ekuilibrium dapat diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = 0$, sehingga Persamaan (11) dapat kita tuliskan

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha - \mu_1 x_1 - \beta x_1 x_2 \\ 0 &= \beta x_1 x_2 - (\gamma + \mu_2)x_2 \\ 0 &= \gamma x_2 - \mu_3 x_3 \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu

- Titik ekuilibrium $E_0\left(\frac{\alpha}{\mu_1}, 0, 0\right)$ atau dikenal sebagai titik ekuilibrium bebas penyakit.
- Titik ekuilibrium $E_1\left(\frac{\gamma + \mu_2}{\beta}, \frac{\alpha\beta - \mu_1\gamma - \mu_1\mu_2}{\beta(\gamma + \mu_2)}, \frac{\gamma(\alpha\beta - \mu_1\gamma - \mu_1\mu_2)}{\beta(\gamma + \mu_2)\mu_3}\right)$ atau dikenal sebagai titik ekuilibrium endemik.

2) Kestabilan titik ekuilibrium

Dengan menggunakan linierisasi di sekitar titik ekuilibrium akan diperoleh analisis kestabilan berdasarkan nilai eigen dan matriks Jacobian dari sistem (11) adalah

$$J_E = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{E})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{E})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\mathbf{E})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{E})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{E})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{E})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{E})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(\mathbf{E})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(\mathbf{E})}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

a. Linierisasi di titik ekuilibrium $E_0\left(\frac{\alpha}{\mu_1}, 0, 0\right)$

Matriks Jacobian di titik $E_0\left(\frac{\alpha}{\mu_1}, 0, 0\right)$ yaitu

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -\mu_1 & -\frac{\beta\alpha}{\mu_1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta\alpha}{\mu_1} - \gamma - \mu_2 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_3 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik (nilai eigen) dari matriks J_{E_0}

$$\det(\lambda I - J_{E_0}) = 0$$

Diperoleh $\lambda_1 = -\mu_1$, $\lambda_2 = \frac{\beta\alpha}{\mu_1} - \gamma - \mu_2$, dan $\lambda_3 = -\mu_3$ titik ekuilibrium E_0 dikatakan stabil asimtotik apabila nilai $\lambda_2 < 0$ atau ketika nilai $\frac{\beta\alpha}{\mu_1} < \gamma + \mu_2$, dikatakan tidak stabil apabila nilai $\lambda_2 > 0$ atau ketika nilai $\frac{\beta\alpha}{\mu_1} > \gamma + \mu_2$.

b. Linierisasi di titik ekuilibrium $E_1\left(\frac{\gamma + \mu_2}{\beta}, \frac{\alpha\beta - \mu_1\gamma - \mu_1\mu_2}{\beta(\gamma + \mu_2)}, \frac{\gamma(\alpha\beta - \mu_1\gamma - \mu_1\mu_2)}{\beta(\gamma + \mu_2)\mu_3}\right)$

Matriks Jacobian di titik $E_1\left(\frac{\gamma + \mu_2}{\beta}, \frac{\alpha\beta - \mu_1\gamma - \mu_1\mu_2}{\beta(\gamma + \mu_2)}, \frac{\gamma(\alpha\beta - \mu_1\gamma - \mu_1\mu_2)}{\beta(\gamma + \mu_2)\mu_3}\right)$ yaitu

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -\mu_1 - \frac{\alpha\beta - \mu_1\gamma - \mu_1\mu_2}{(\gamma + \mu_2)} & -\gamma - \mu_2 & 0 \\ -\frac{\alpha\beta - \mu_1\gamma - \mu_1\mu_2}{(\gamma + \mu_2)} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_3 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik (nilai eigen) dari matriks J_{E_1}

$$\det(\lambda I - J_{E_1}) = 0$$

Jika nilai $A = \alpha^2\beta^2 - 8\gamma\alpha\mu_2\beta + 4\mu_1\gamma^3 + 12\mu_1\mu_2\gamma^2 - 4\alpha\beta\gamma^2 + 12\gamma\mu_1\mu_3^2 - 4\mu_2^2\alpha\beta + 4\mu_1\mu_2^2$ diperoleh

$$\lambda_4 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\beta + \sqrt{A}}{\gamma + \mu_2}\right), \lambda_5 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\beta - \sqrt{A}}{\gamma + \mu_2}\right), \lambda_6 = -\mu_3$$

Titik ekuilibrium E_1 dapat dikatakan stabil asimtotik apabila bagian real dari parameter $\lambda_4, \lambda_5 < 0$, dan tidak stabil apabila $\lambda_4 > 0$ atau $\lambda_5 > 0$.

Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk menganalisis kriteria kestabilan dari titik ekuilibrium

berdasarkan angka reproduksi dasar (R_0) yaitu ketika $R_0 > 1$ dan ketika $R_0 < 1$, dengan simulasi menggunakan metode Euler dan metode Runge-Kutta orde 4. Bilangan reproduksi dasar dari Persamaan (9) diuraikan berikut:

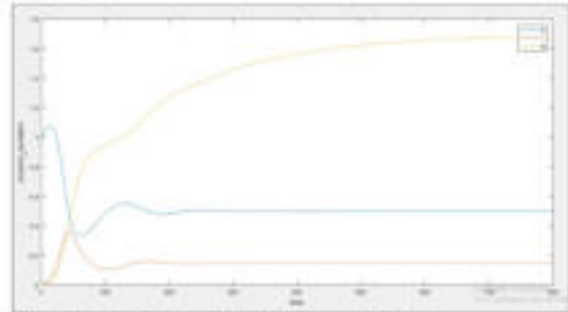
$$R_0 = \frac{\beta\alpha}{\mu_1(\gamma + \mu_2)}$$

1) Simulasi ketika $R_0 > 1$

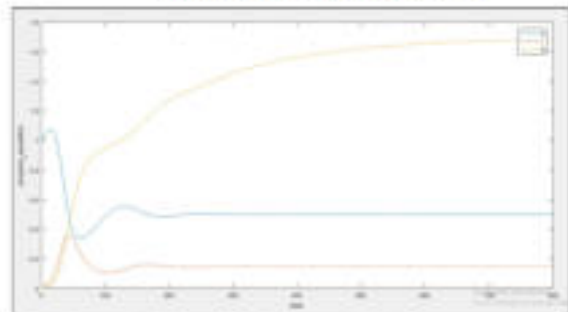
Berdasarkan studi literatur diperoleh informasi untuk nilai parameter dari Persamaan (9) berikut:

- Diasumsikan jumlah populasi awal adalah $N_1 = 1000$
- Laju kelahiran alami (α) diperoleh dari angka kelahiran di Indonesia tahun 2020 (Anonim, 2020a), sebesar $\alpha = \frac{17}{1000} = 0,017$
- Laju kematian alami populasi rentan (μ_1) diperoleh dari angka kematian di Indonesia tahun 2020 (Anonim, 2020b), sebesar $\mu_1 = \frac{7}{1000} = 0,007$
- Individu yang terinfeksi dan dikarantina dapat meninggal akibat penyakit dalam waktu ± 30 hari (Levani *et al.*, 2021), maka laju kematian akibat Covid-19 adalah $\mu_2 = 0.03$.
- Laju kematian alami populasi sembuh (μ_3) diperoleh dari angka kematian di Indonesia (Alfana *et al.*, 2018) sebesar $\mu_3 = \frac{6}{1000} = 0,006$
- Laju penularan (β) Covid-19 setelah kontak langsung dengan individu terinfeksi diperlukan ± 5 hari untuk dapat mengetahui individu tersebut telah terinfeksi (Manaqib *et al.*, 2021), maka nilai $\beta = \frac{1}{5hari} = 0.2$
- Individu yang terinfeksi Covid-19 dan dikarantina dapat sembuh dari penyakit dalam waktu ± 14 hari (Nasution *et al.*, 2021), maka laju kesembuhan (γ) penyakit Covid-19 adalah $\gamma = \frac{1}{14hari} = 0,07$
- Nilai R_0 pada populasi tidak konstan yaitu $R_0 = 4,8$, sehingga nilai $R_0 > 1$.

Pada Gambar 3 dan Gambar 4 adalah grafik hasil simulasi numerik menggunakan metode Euler dan metode Runge-Kutta orde 4 (RK4) yang diimplementasikan pada Matlab ketika $R_0 > 1$:

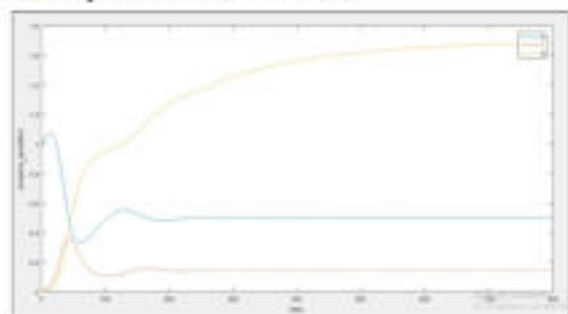


Gambar 3: Simulasi Sistem (10) dengan Metode Euler ketika $R_0 > 1$



Gambar 4: Simulasi Sistem (10) dengan Metode RK4 ketika $R_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 3 dan Gambar 4 diperoleh hasil simulasi yang sama dengan menggunakan metode Euler dan metode Runge-Kutta orde 4, dan hasil simulasi dari kedua metode dapat dilihat pada Gambar 5 berikut



Gambar 5: Simulasi Sistem (10) Metode Euler dan Metode RK4 ketika $R_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 4.10 dapat dilihat subpopulasi rentan (S) turun hingga hari ke-100, kemudian mengalami kenaikan akibat adanya kelahiran pada populasi dan terus mengalami naik turun hingga mencapai titik kestabilan pada hari ke-800. Populasi terinfeksi (I) turun hingga

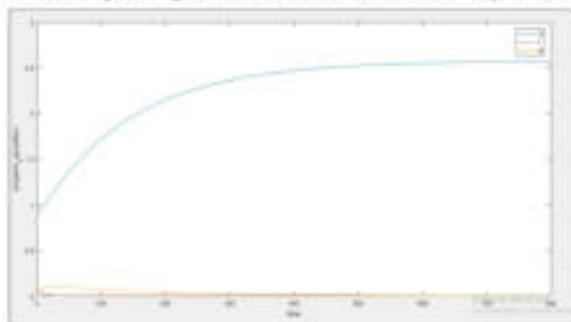
hari ke 100 dan kemudian kembali naik dan turun hingga mencapai titik kestabilan pada hari ke-800. Populasi sembuh (R) terus mengalami kenaikan hingga mencapai titik kestabilannya.

Hasil simulasi numerik pada populasi tidak konstan ketika $R_0 > 1$ dapat dilihat bahwa ketiga subpopulasi terus menuju kestabilan di titik ekuilibrium endemik yang mengakibatkan penyakit akan terus ada pada populasi dan stabil asimtotik pada titik ekuilibrium endemik E_1 .

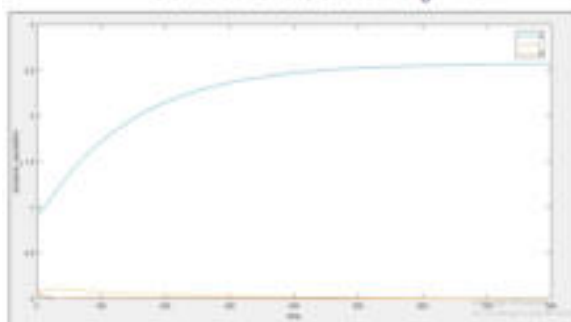
2) Simulasi ketika $R_0 < 1$

Untuk menghasilkan nilai $R_0 < 1$, maka nilai parameter yang harus diperkecil adalah parameter (β). Diasumsikan masa inkubasi virus pada pasien hingga merasakan gejala terinfeksi dibutuhkan paling lama 15,5 hari (Levani *et al.*, 2021), maka $\beta = \frac{1}{15,5 \text{ hari}} = 0.06$. Pasien yang memiliki kekebalan tubuh yang baik dapat dinyatakan sembuh dari Covid-19 ± 7 hari, sehingga $\gamma = \frac{1}{7 \text{ har}} = 0.14$ (Hamid *et al.*, 2020). Berdasarkan parameter diperoleh $R_0 = 0.9 < 1$.

Pada Gambar 6 dan Gambar 7 adalah hasil simulasi menggunakan metode Euler dan metode Runge-Kutta orde 4 (RK4) dengan bantuan perangkat lunak Matlab ketika $R_0 < 1$:

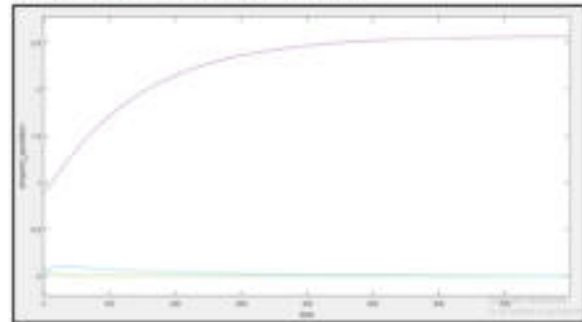


Gambar 6: Simulasi Sistem (10) dengan Metode Euler ketika $R_0 < 1$



Gambar 7: Simulasi Sistem (10) dengan Metode RK4 ketika $R_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 6 dan Gambar 7 diperoleh hasil simulasi yang sama dengan menggunakan metode Euler dan metode Runge-Kutta orde 4, dan hasil simulasi dari kedua metode dapat dilihat pada Gambar 8 berikut



Gambar 8: Simulasi Sistem (10) Metode Euler dan Metode RK4 ketika $R_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 8 dapat dilihat bahwa ketiga subpopulasi akan terus menuju titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 dan stabil asimtotik di titik tersebut pada hari ke-800. Hal ini menunjukkan penyakit akan menghilang dari populasi.

4. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan, model epidemiologi yang diaplikasikan pada penyebaran Covid-19 adalah model Endemi SIR pada populasi tidak konstan, model matematika penyebaran berupa sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu. Analisis titik ekuilibrium model diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Model penyebaran penyakit Covid-19 pada populasi tidak konstan memiliki bilangan reproduksi dasar (R_0), dari hasil simulasi model dengan menggunakan metode Euler dan metode RK4 yaitu ketika $R_0 > 1$ menandakan penyakit akan mewabah hingga mencapai kestabilan pada titik ekuilibrium endemik, dan ketika $R_0 < 1$ penyakit akan mewabah hingga mencapai kestabilan di titik ekuilibrium bebas penyakit yang menandakan penyakit akan menghilang dari populasi.

Penulis menganalisis model SIR sederhana, sehingga penulis menyarankan kepada mahasiswa jurusan matematika agar dapat terus mengembangkan model SIR pada penyebaran Covid-19 dengan berbagai kondisi dan diharapkan tulisan ini dapat menjadi acuan dalam penelitian-penelitian selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Alfana, M.A.F., Iffani, M. & Hanif, W.A.N.P. 2018. Mortalitas di Indonesia (Sejarah Masa Lalu dan Proyeksi ke Depan). *Seminar Nasional dan PIT IGI XVIII*, 1–24.
- Anonim, 2020a. *Birth Rate, Crude (per 1000 People)-Indonesia*. The World Bank. Tersedia di <https://data.worldbank.org/indicator/SP.DY.N.CBRT.IN?locations=ID> [Accessed 15 Juni 2022].
- Anonim, 2020b. *Death Rate, Crude (per 1000 people)-Indonesia*. The World Bank. Tersedia di <https://data.worldbank.org/indicator/SP.DY.N.CBRT.IN?locations=ID> [Accessed 15 Juni 2022].
- Anton, H. & Rorres, C. 2014. *Elementary Linear Algebra*. 11th ed. Canada: Wiley.
- Cahyono, E. 2013. *Pemodelan Matematika*. Pertama ed. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Chapra, S.C. & Canale, R.P. 2010. *Numerical methods for engineers*. 6th ed. New York: McGraw-Hill Higher Education.
- Hale, J.K. & Kocak, H. 1991. *Dynamics and Bifurcation*. New York: Springer.
- Hamid, S., Mir, M.Y. & Rohela, G.K. 2020. Novel coronavirus disease (COVID-19): a pandemic (epidemiology, pathogenesis and potential therapeutics). *New Microbes and New Infections*, 35: 100679.
- Hethcote, H.W. 2000. The Mathematics of Infectious. *Society*, 42(4): 599–653.
- Layek, G.C. 2015. *An introduction to dynamical systems and chaos. An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. New Delhi: Springer.
- Levani, Prastya & Mawaddatunmadila 2021. Coronavirus Disease 2019 (COVID-19): Patogenesis, Manifestasi Klinis dan Pilihan Terapi. *Jurnal Kedokteran dan Kesehatan*, 17(1): 44–57.
- Macias-Diaz, J.E., Raza, A., Ahmed, N. & Rafiq, M. 2021. Analysis of a nonstandard computer method to simulate a nonlinear stochastic epidemiological model of coronavirus-like diseases. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 204.
- Manaqib, M., Azizah, M., Hartati S., E., Pratiwi, S. & Maulana, R.A. 2021. Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Covid-19 Dengan Lockdown Dan Karantina. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 15(3): 479–492.
- Nasution, N.H., Hidayah, A., Sari, K.M., Cahyati, W., Khoiriyah, M., Hasibuan, R.P., Lubis, A.A. & Siregar, A.Y. 2021. Gambaran Pengetahuan Masyarakat Tentang Pencegahan Covid-19 Kecamatan Padangsidempuan Batunadua, Kota Padangsidempuan. *Jurnal Biomedika dan Kesehatan*, 4(2): 47–49.
- Pasaribu, R.H., Idris Shaleh Harahap, Z., Arga Putra, B. & Laila Angelia Siregar, S. 2020. Aplikasi Pemodelan Matematika dalam Memodelkan Penyebaran Virus Covid-19 di Indonesia. *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, 194–199.
- Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3th ed. New York: Springer.
- Raza, A., Arif, M.S. & Rafiq, M. 2019. A reliable numerical analysis for stochastic dengue epidemic model with incubation period of virus. *Advances in Difference Equations*, 2019(1).
- Rifhat, R., Teng, Z. & Wang, C. 2021. Extinction and persistence of a stochastic SIRV epidemic model with nonlinear incidence rate. *Advances in Difference Equations*, 2021(1).
- Sitinjak, A.A. 2021. Penentuan Rumus Bilangan Berproduksi Dasar pada Model Matematika Covid-19 dari Model SIR yang Dimodifikasi. *Jurnal Edumatsains*, 5(2): 203–210.