

ESTIMASI PARAMETER DARI DISTRIBUSI WEIBULL BERDASARKAN SAMPEL TERSENSOR TIPE II DAN TIPE I

Christina D. P. R. Paeto

Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
E-mail: christinadesrianaputri@gmail.com

**Wayan Somayasa¹⁾, Ruslan²⁾, Muhammad Kabil Djafar³⁾, Herdi Budiman⁴⁾
dan Rahmaliah Sahupala⁵⁾**

Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
E-mail: ¹⁾wayan.somayasa@uho.ac.id
²⁾ruslan@uho.ac.id

ABSTRAK

Analisis uji hidup merupakan salah satu kumpulan dari prosedur statistika untuk analisis data dimana variabelnya adalah waktu sampai terjadinya kejadian. Data uji hidup dapat berupa data lengkap ataupun data hasil penyensoran. Penyensoran data pada penelitian ini adalah penyensoran tipe II dan tipe I. Ada berbagai keluarga parametrik dari model yang digunakan dalam analisis data uji hidup, diantaranya adalah model distribusi Weibull dan distribusi Nilai Ekstrim. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan estimasi parameter dari distribusi Weibull berdasarkan sampel tersensor tipe II dan tipe I dengan melakukan transformasi variabel distribusi Weibull menjadi variabel distribusi Nilai Ekstrim. Berdasarkan transformasi tersebut, maka akan dilakukan estimasi parameter distribusi Nilai Ekstrim dengan metode *maximum likelihood estimation* (MLE) dan didapatkan penyelesaian yang nonlinier, sehingga prosedur dilanjutkan dengan metode Newton-Raphson untuk memperoleh penyelesaiannya. Hasil estimasi parameter Nilai Ekstrim yang diperoleh nantinya akan ditransformasi kembali menjadi parameter distribusi Weibull.

Kata Kunci: data uji hidup, penyensoran tipe II, penyensoran tipe I, metode Newton-Raphson, distribusi Weibull, distribusi Nilai Ekstrim, *maximum likelihood estimation* (MLE)

ABSTRACT

Lifetime test analysis is a collection of statistical procedures for data analysis where the variable is the time to event. Lifetime data can be in the form of complete data or censored data. The censored data in this study are type II and type I censored. Various parametric families of models used in the analysis of lifetime data, including the Weibull distribution model and the Extreme Value distribution. The purpose of this study was to determine the parameter estimation of the Weibull distribution based on type II and type I censored samples by transforming the Weibull distribution variables into Extreme Value distribution variables. Based on this transformation, an estimation of the Extreme Value distribution parameter will be carried out using the maximum likelihood estimation (MLE) method and a nonlinear solution will be obtained, so the procedure is continued with the Newton-Raphson method to obtain the solution. The estimation results of the Extreme Value parameter obtained will later be transformed back into the Weibull distribution parameter.

Keywords: *lifetime test data, type II censored, type I censored, Newton-Raphson method, Weibull distribution, Extreme Value distribution, maximum likelihood estimation (MLE)*

1. Pendahuluan

Analisis data uji hidup merupakan salah satu teknik statistika yang berguna untuk melakukan pengujian tentang daya tahan atau kehandalan suatu komponen atau lamanya daya tahan hidup seseorang. Kehandalan ini dapat diartikan sebagai probabilitas tidak terjadinya kegagalan atau kerusakan suatu alat untuk melakukan fungsinya secara wajar selama periode operasi yang ditentukan (Widiharih dan Mardijiyanti, 2008). Secara umum, analisis uji

hidup adalah salah satu kumpulan dari prosedur statistika untuk analisis data dimana variabelnya adalah waktu sampai terjadinya kejadian. Dalam analisis uji hidup, biasanya merujuk variabel waktu sebagai waktu hidup (*survival time*), karena menunjukkan waktu seseorang atau suatu alat bertahan (*survived*) selama periode tertentu. Secara khusus kejadian yang dimaksudkan sebagai suatu kegagalan, karena kejadian yang menjadi perhatian biasanya adalah kematian, timbulnya penyakit atau

beberapa kejadian lainnya (Sari dkk., 2013). Tujuan dari analisis data uji hidup adalah untuk menentukan model yang dapat dipakai untuk menggambarkan model distribusi peluang suatu variabel uji hidup serta melakukan inferensi terhadap parameter-parameter model.

Dalam melakukan pemodelan data uji hidup dibutuhkan data tentang daya tahan hidup yang dapat berupa data lengkap (semua objek dicatat daya tahan hidupnya sampai semua mati) atau data tersensor. Data tersensor adalah data hasil pengamatan dari objek yang diteliti pada kurun waktu tertentu dan tidak mengalami kegagalan hingga penelitian berakhir (Kusumawardhani dkk., 2018). Ada 3 macam penyensoran data, yaitu sensor tipe I, sensor tipe II, dan sensor tipe II progresif. Untuk sensor tipe I, setiap objek yang diteliti (n) masuk pengujian dan pengujian untuk setiap objek dihentikan pada waktu tertentu yang sudah ditentukan. Untuk sensor tipe II, semua objek yang diteliti (n) masuk pengujian dalam waktu yang bersamaan, dan pengujian dihentikan setelah mendapatkan r objek diantaranya mati, dengan $1 \leq r \leq n$ (Sari dkk., 2013). Kemudian, menurut Lawless (1982) penyensoran tipe II progresif adalah sebuah generalisasi dari penyensoran tipe II. Dalam kasus ini, kegagalan pertama r_1 pada sampel n akan teramati; kemudian, sisa item $n - r_1$ yang belum gagal dikeluarkan dari percobaan, menyisakan $n - r_1 - n_1$ item. Ketika dilanjutkan r_2 item gagal, n_2 dari item yang belum gagal dikeluarkan, dan seterusnya. Eksperimen akan berakhir setelah serangkaian pengulangan prosedur. Pada penelitian ini penulis tertarik untuk menggunakan data yang merupakan hasil penyensoran tipe II dan tipe I.

Ada berbagai keluarga parametrik dari model yang digunakan dalam analisis data uji hidup dan pemodelan umur atau kegagalan proses. Diantaranya adalah model distribusi Weibull dan distribusi Nilai Ekstrim. Distribusi Weibull merupakan model distribusi uji hidup yang paling banyak digunakan untuk aplikasi jangka waktu hidup atau daya tahan barang yang diproduksi secara umum. Model distribusi Weibull banyak digunakan sebagai model untuk berbagai jenis komponen, seperti komponen mobil, bahkan sering juga digunakan dalam bidang medis, seperti penelitian tumor pada manusia dan sebagainya (Lawless, 2011). Kemudian, Model distribusi Nilai Ekstrim juga disebut distribusi Gumbel karena ditemukan oleh E. J. Gumbel pada tahun 1958. Model distribusi Nilai Ekstrim tidak berhubungan langsung dengan distribusi uji hidup, melainkan distribusi ini merupakan hasil transformasi dari distribusi Weibull.

Parameter merupakan suatu konstanta yang tidak diketahui yang menggambarkan karakteristik dari suatu populasi. Karena nilainya tidak diketahui,

maka perlu dilakukan pendugaan parameter atau estimasi parameter (Kurniasih, 2014). Estimasi parameter adalah penaksiran terhadap nilai-nilai parameter populasi berdasarkan data atau sampel yang diambil dari populasi. Salah satu metode yang umum digunakan untuk mengestimasi parameter adalah *maximum likelihood estimation* (MLE) (Purba, 2018). MLE merupakan suatu metode pendugaan parameter yang memaksimalkan fungsi *likelihood* (Nurlaila, 2013). Namun, menurut Purba (2018) umumnya maksimum *likelihood* suatu fungsi berbentuk nonlinier sehingga tidak bisa diselesaikan secara analitik, oleh karena itu untuk menyelesaikannya digunakan metode numerik, seperti metode Newton-Raphson.

Pada penelitian ini akan dilakukan estimasi parameter dari distribusi Weibull berdasarkan sampel tersensor tipe II dan tipe I. Karena distribusi Nilai Ekstrim merupakan transformasi dari distribusi Weibull, maka distribusi ini dapat digunakan untuk mempermudah pengerjaan estimasi parameter distribusi Weibull, karena parameter lokasi dan parameter skala dari distribusi Nilai Ekstrim yang sebelumnya diperoleh dari transformasi distribusi Weibull dapat dengan mudah ditransformasikan kembali menjadi parameter distribusi Weibull.

2. Kajian Pustaka

2.1 Konsep Dasar Analisis Uji Hidup

Analisis uji hidup adalah cabang dari statistika yang berhubungan dengan pemodelan waktu hidup (*lifetime*) atau daya tahan (*survival time*) atau waktu kegagalan (*failure time*) suatu objek. Analisis uji hidup atau analisis *survival* adalah prosedur untuk menganalisa data dimana variabel yang diperhatikan yaitu waktu sampai suatu kejadian terjadi (Kleinbaum dan Klein, 2005). Istilah uji hidup atau *lifetime* jugaberarti lama waktu yang dibutuhkan suatu individu bertahan hidup (Lawless, 2011).

Misalkan T merupakan variabel acak yang mempunyai nilai pada interval $[0, \infty)$ menyatakan waktu sampai kejadian terjadi. Fungsi padatan peluang dari T dinyatakan dengan $f(t)$ (Harlan, 2017), sedangkan fungsi distribusi kumulatif (FDK) dari T adalah

$$F(t) := P\{T \leq t\} = \int_0^t f(x) dx$$

Definisi 2.1 Fungsi *survival* dari T adalah $S(t) = P\{T \geq t\}$, yaitu probabilitas bahwa suatu objek bertahan hidup lebih lama dari waktu t . Jadi,

$$\begin{aligned} S(t) &= 1 - F(t) \\ &= 1 - P\{T \leq t\} \end{aligned}$$

(Harlan, 2017)

karena $f(t)$ adalah turunan pertama dari $F(t)$ terhadap t , maka

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d(1 - S(t))}{dt} = -S'(t) \quad (2.1)$$

Adapun sifat-sifat dari $S(t)$ adalah sebagai berikut:

- Fungsi $S(t)$ merupakan fungsi turun, yaitu nilai $S(t)$ mengecil sejalan dengan bertambahnya nilai t .
- Untuk $t = 0$, $S(t) = S(0) = 1$, yaitu pada awal pengamatan belum ada subjek yang mengalami kegagalan atau $P\{T \geq 0\} = 1$
- Untuk $t = \infty$, $S(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$, yaitu tidak ada objek yang dapat bertahan hidup selamanya.

Untuk suatu konstanta $p \in (0,1)$ bilangan t_p yang memenuhi sifat atau persamaan $F(t_p) = p$ disebut kuantil ke- p dari T . Dengan kata lain $t_p = F^{-1}(p)$.

Definisi 2.2 (Harland, 2017) Fungsi hazard dari T dinyatakan dengan $h(t)$, yaitu

$$h(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t\}}{\Delta t} \\ = F'(t) \frac{1}{s(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}$$

Fungsi hazard bukan merupakan fungsi probabilitas, melainkan merupakan laju (*rate*) kegagalan, sehingga fungsi hazard disebut juga sebagai *rate hazard*. Jika kegagalan yang dipelajari adalah kematian, maka fungsihazard menyatakan laju kematian (*mortalitas*) (Harlan, 2017).

2.2 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull merupakan distribusi peluang kontinu yang diperkenalkan oleh Wallodi Weibull pada tahun 1951. Distribusi ini merupakan salah satu distribusi yang sering digunakan untuk menangani masalah kehandalan atau daya tahan suatu alat atau komponen (Otaya, 2016). Distribusi ini bahkan sering juga digunakan dalam bidang medis, seperti penelitian tumor pada manusia dan sebagainya (Lawless, 2011).

Definisi 2.3 Suatu variabel uji hidup T dikatakan berdistribusi Weibull (ditulis $T \sim WEI(\lambda, \beta)$) dimana $\lambda > 0$ dan $\beta > 0$, jika T mempunyai fungsi kepadatan peluang (FKP), yaitu:

$$f(t; \lambda, \beta) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1} \exp\{-(\lambda t)^\beta\}, t > 0$$

(Chan dkk., 2014)

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Weibull dengan parameter λ dan β (Lawless, 1982) adalah

$$F(t) = 1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta\} \quad (2.2)$$

Berdasarkan Definisi 2.1 dan (2.2), maka fungsi survival dari distribusi Weibull adalah

$$S(t) = 1 - F(t) \\ = \exp\{-(\lambda t)^\beta\} \quad (2.3)$$

Selanjutnya dari (2.3) dan Definisi 2.3, maka diperoleh

$$h(t) = \frac{f(t)}{s(t)} = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}$$

Untuk $p \in (0,1)$ kuantil ke- p dari distribusi $WEI(\lambda, \beta)$ dapat diperoleh dari persamaan (Lawless, 1982)

$$p = F(t_p) \Leftrightarrow p = 1 - \exp\{-(\lambda t_p)^\beta\} \\ \Leftrightarrow t_p = \frac{1}{\lambda\beta} (-\log(1 - p))$$

Untuk r bilangan bulat positif, momen ke- r dari model distribusi Weibull adalah

$$E(T^r) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{\beta}\right) = \frac{1}{\lambda^r} \Gamma\left(1 + \frac{r}{\beta}\right) \quad (2.4)$$

dengan $\Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1} e^{-u} du, k > 0$ adalah fungsi gamma. Dari (2.4) diperoleh

- $E(T) = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$
- $Var(T) = E(T^2) - (E(T))^2 \\ = \frac{1}{\lambda^2} \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right)^2 \right)$.

2.3 Distribusi Nilai Ekstrim

Distribusi Nilai Ekstrim juga disebut distribusi Gumbel karena ditemukan oleh E. J. Gumbel pada tahun 1958. Model distribusi Gumbel tidak berhubungan langsung dengan distribusi uji hidup, melainkan distribusi ini merupakan hasil transformasi dari distribusi Weibull (Lawless, 1982).

Definisi 2.4 Misalkan T mengikuti distribusi Weibull ($T \sim WEI(\lambda, \beta)$) di mana $\lambda > 0$ dan $\beta > 0$ adalah parameter skala dan parameter bentuk dengan fungsi kepadatan peluang

$$f(t; \lambda, \beta) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1} \exp\{-(\lambda t)^\beta\}, t > 0$$

maka variabel $X := \ln T$ dikatakan mengikuti distribusi Nilai Ekstrim ($X \sim GUMBEL(u, b)$) dengan parameter lokasi $u = -\ln \lambda$ dan parameter skala $b = \frac{1}{\beta}$, maka fungsi kepadatan peluang dari X adalah

$$f(x; u, b) = \frac{1}{b} \exp\left\{\frac{x-u}{b} - \exp\left\{\frac{x-u}{b}\right\}\right\}. \quad (2.5)$$

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Nilai Ekstrim dengan parameter u dan b (Lawless, 1982) adalah

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\exp\left\{\frac{x-u}{b}\right\}\right\} \quad (2.6)$$

Berdasarkan Definisi 2.1 dan (2.6), maka fungsi *survival* dari distribusi Nilai Ekstrim (Lawless, 1982) adalah

$$S(x) = \exp\left\{-\exp\left\{\frac{x-u}{b}\right\}\right\}; 0 < x < \infty \quad (2.7)$$

Selanjutnya, dari (2.7) dan Definisi 2.3, maka diperoleh

$$h(x) = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{1}{b} \exp\left\{\frac{x-u}{b}\right\}.$$

Untuk $p \in (0,1)$ kuantil ke- p dari distribusi $GUMBEL(u, b)$ dapat diperoleh dari persamaan

$$F(x_p) = p \Leftrightarrow 1 - \exp\left\{-\exp\left\{\frac{x_p - u}{b}\right\}\right\} = p$$

$$\Leftrightarrow x_p = u + b \ln(-\ln(1 - p)).$$

2.4 Penyensoran

Ciri khas dari suatu data uji hidup adalah bahwa data diperoleh melalui penyensoran. Penyensoran secara umum terjadi ketika masa hidup yang sebenarnya hanya diketahui sebagian saja. Secara umum, sebuah objek atau item dikatakan tersensor pada L jika waktu hidup dari objek tidak diketahui, tetapi lebih besar atau sama dengan L . Demikian pula, sebuah objek dikatakan tidak tersensor pada L jika waktu hidup sebenarnya kurang dari atau sama dengan L (Lawless, 2011). Pada penyensoran data dikenal istilah penyensoran kanan dan penyensoran kiri. Penyensoran kanan terjadi bila waktu hidup dari objek yang diamati melewati periode waktu pengamatan tidak diketahui secara pasti, sehingga pengamatan waktu hidup terhenti di sebelah kanan periode pengamatan. Sedangkan, penyensoran kiri terjadi jika pada saat waktu awal objek tidak teramati pada saat awal pengamatan, sementara kegagalan dapat diamati secara penuh sebelum penelitian berakhir (Riyandianci, 2017).

Pada penelitian ini istilah penyensoran akan mengacu pada “penyensoran kanan”, dan jika waktu hidup individu mengalami penyensoran pada L , maka akan disebut L waktu sensor untuk individu (Lawless, 1982). Adapun jenis-jenis penyensoran adalah sebagai berikut.

2.4.1 Penyensoran Tipe II

Sampel tersensor tipe II merupakan r hasil observasi terkecil dalam sampel acak berukuran n dari pengamatan ($1 \leq r \leq n$). Percobaan yang menggunakan penyensoran tipe II sering digunakan misalnya dalam uji hidup; Total item n diuji dan diamati, tetapi pengamatan dilakukan tidak sampai semua item n gagal. Uji semacam ini dapat menghemat waktu dan biaya, karena dalam beberapa kasus dibutuhkan waktu yang sangat lama untuk semua item mengalami kegagalan. Hal ini akan terlihat pada pengamatan statistik data penyensoran tipe II (Lawless, 1982).

Hal yang perlu ditekankan bahwa penyensoran tipe II dilakukan dengan memutuskan terlebih dahulu jumlah r pengamatan sebelum data dikumpulkan. Secara formal, data sensor Tipe II terdiri dari r waktu hidupterkecil $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(r)}$ dari sampel acak n waktu hidup T_1, T_2, \dots, T_n dari distribusi uji hidup. Jika T_1, T_2, \dots, T_n berdistribusi identik dan saling bebas dan berdistribusi kontinu dengan fungsi kepadatan peluang $f(t)$ dan fungsi survival $S(t)$, serta merupakan sampel terurut, maka

fungsi kepadatan peluang bersama dari $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(r)}$ adalah sebagai berikut.

$$\frac{n!}{(n-r)!} f(t_{(1)}) \dots f(t_{(r)}) [s(t_{(r)})]^{n-r} \quad (2.8)$$

2.4.2 Penyensoran Tipe II Progresif

Sebuah generalisasi dari penyensoran tipe II adalah penyensoran tipe II progresif. Dalam kasus ini, kegagalan pertama r_1 pada sampel n akan teramati; kemudian, sisa item $n - r_1$ yang belum gagal dikeluarkan dari percobaan, menyisakan $n - r_1 - n_1$ item. Ketika dilanjutkan r_2 item gagal, n_2 dari item yang belum gagal dikeluarkan, dan seterusnya. Eksperimen akan berakhir setelah serangkaian pengulangan prosedur (Lawless, 1982). Adapun fungsi *likelihood*-nya sebagai berikut.

$$c f(t_{(1)}) \dots f(t_{(r_1)}) [S(t_{(r_1)})]^{n_1} (f(t_{(1)}^*) \dots f(t_{(r_2)}^*)) [S(t_{(r_2)}^*)]^{n-r_1-n_1-r_2}$$

dimana

$$c = \frac{n! (n - n_1 - r_1)!}{(n - r_1)! (n - r_1 - n_1 - r_2)!}$$

2.4.3 Penyensoran Tipe I

Terkadang percobaan yang dilakukan atas jangka waktu yang tetap dengan cara yang sedemikian sehingga waktu hidup dari suatu individu dapat diketahui nilai sebenarnya hanya jika nilai yang diperoleh kurang dari nilai yang ditentukan sebelumnya. Pada situasi ini data dikatakan sebagai data hasil penyensoran tipe I. Sebagai contoh, dalam percobaan uji hidup n item pengamatan dihentikan setelah melewati waktu L . Waktu hidup ini kemudian diketahui hanya untuk benda-benda yang gagal berdasarkan waktu L . Setiap item memiliki waktu sensor L_i masing-masing, karena tiap item ini tidak dimulai pada waktu yang bersamaan. Penyensoran tipe I ini sering digunakan dalam penelitian medis, misalnya keputusan untuk mengakhiri studi pada waktu yang tidak semua kehidupan individu diketahui (Lawless, 1982).

Penyensoran tipe I terjadi ketika individu-individu $1, 2, \dots, n$ yang merupakan objek pada periode pengamatan terbatas pada L_1, L_2, \dots, L_n sehingga waktu hidup yang sebenarnya dari tiap individu T_i dapat diketahui hanya jika $T_i \leq L_i$. Ketika semua waktu L_i sama, maka data ini disebut sebagai penyensoran tipe I tunggal untuk membedakan ini dengan kasus umum (Lawless, 1982).

Misalkan terdapat n individu di bawah studi yang terkait dengan individu ke- i yang merupakan data uji hidup T_i dan waktu sensor L_i . Diasumsikan bahwa T_i berdistribusi identik dan saling bebas, dengan fungsi kepadatan peluang $f(t)$ dan fungsi

survival $S(t)$. Maka waktu hidup eksak (sebenarnya) dari T_i untuk tiap individu hanya jika hasil pengamatan $T_i \leq L_i$ (Lawless, 1982). Data ini akan bersesuaian diwakili dengan n pasangan variabel (t_i, δ_i) , dimana

$$t_i = \min(T_i, L_i)$$

dan

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{jika } T_i \leq L_i \\ 0, & \text{jika } T_i > L_i \end{cases}$$

δ_i ini menyatakan apakah data uji hidup T_i tersensor atau tidak, dan t_i sama dengan T_i jika teramati, dan untuk t_i sama dengan L_i jika tidak teramati (melawati waktu sensor). Fungsi kepadatan peluang dari t_i dan δ_i adalah sebagai berikut.

$$f(t_i)^{\delta_i} S(L_i)^{1-\delta_i}$$

Untuk melihat ini, perlu dicatat bahwa t_i merupakan campuran variabel acak dengan komponen kontinu dan diskrit. Untuk bagian diskrit

$$\begin{aligned} \Pr(t_i = L_i) &= \Pr(\delta_i = 0) \\ &= \Pr(T_i > L_i) = S(L_i) \end{aligned}$$

Untuk nilai $t_i < L_i$ fungsi kepadatan peluang kontinu adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \Pr(t_i | \delta_i = 1) &= \Pr(t_i | t_i < L_i) \\ &= \frac{f(t_i)}{1 - S(L_i)} \end{aligned}$$

dimana notasi $\Pr(t_i | \delta_i = 1)$ menyatakan fungsi kepadatan peluang dari t_i untuk $t_i < L_i$. Distribusi dari (t_i, δ_i) ini memiliki komponen

$$\begin{aligned} \Pr(t_i = L_i, \delta_i = 0) &= \Pr(\delta_i = 0) = S(L_i) \\ \Pr(t_i, \delta_i = 1) &= \Pr(t_i | \delta_i = 1) \Pr(\delta_i = 1) \\ &= f(t_i), \quad t_i < L_i \end{aligned}$$

Pernyataan ini dapat digabungkan menjadi pernyataan tunggal $\Pr(t_i, \delta_i) = f(t_i)^{\delta_i} S(L_i)^{1-\delta_i}$, dan jika pasangan (t_i, δ_i) saling bebas, maka fungsi *likelihood*-nya adalah

$$L = \prod_{i=1}^n f(t_i)^{\delta_i} S(L_i)^{1-\delta_i} \quad (2.9)$$

2.5 Sensor Tipe II untuk Distribusi Weibull dan Distribusi Nilai Ekstrim

Fungsi kepadatan peluang dari distribusi Weibull adalah sebagai berikut.

$$f(t; \theta, \beta) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta\right\} \quad (2.10)$$

di mana $\theta > 0$ dan $\frac{1}{\lambda} > 0$ dan $\beta > 0$ adalah parameter skala dan parameter bentuk. Biasanya akan lebih mudah untuk mengerjakan Distribusi Weibull dengan menggunakan distribusi Nilai Ekstrim yang mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut.

$$f(x; b, u) = \frac{1}{b} \exp\left\{\frac{x-u}{b} - \exp\left\{\frac{x-u}{b}\right\}\right\} \quad (2.11)$$

dimana $-\infty < x < \infty$ dan u ($-\infty < u < \infty$) dan b ($b > 0$) adalah parameter. Seperti yang sebelumnya sudah dijelaskan pada 2.3, jika T

mempunyai fungsi kepadatan peluang (2.10), maka $X = \log T$ mempunyai fungsi kepadatan peluang (2.11), dengan $u = \ln \theta$ dan $b = \frac{1}{\beta}$ (Chan dkk., 2014). Hal yang memudahkan dalam mengerjakan distribusi Weibull dengan menggunakan distribusi Nilai Ekstrim adalah karena u dan b adalah parameter lokasi dan parameter skala, yang mana nilai u dan b yang diperoleh nantinya dapat dengan mudah ditransformasikan dari distribusi Nilai Ekstrim ke distribusi Weibull (Lawless, 1982).

Misalkan $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(r)}$ merupakan r observasi terkecil dalam sampel acak berukuran n dari distribusi Weibull, maka akan ekuivalen dengan $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(r)}$, dimana $x_i = \log t_i$ adalah r observasi terkecil dalam sampel acak berukuran n dari distribusi Nilai Ekstrim (Lawless, 1982). Maka, fungsi kepadatan peluang bersama dari $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(r)}$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} &\frac{n!}{(n-r)!} f(x_{(1)}) \dots f(x_{(r)}) [S(x_{(r)})]^{n-r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \left(\prod_{i=1}^r \frac{1}{b} \exp\left\{\frac{x_{(i)}-u}{b}\right\} \right. \\ &\quad \left. - \exp\left\{\frac{x_{(i)}-u}{b}\right\} \right) \left[\exp\left\{-\exp\left\{\frac{x_{(r)}-u}{b}\right\}\right\} \right]^{n-r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{b^r} \exp\left(\sum_{i=1}^r \frac{x_{(i)}-u}{b} - \exp\left\{\sum_{i=1}^r \frac{x_{(i)}-u}{b}\right\}\right) \\ &\quad \exp\left\{-(n-r) \exp\left\{\frac{x_{(r)}-u}{b}\right\}\right\} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{b^r} \exp\left(\sum_{i=1}^r \frac{x_{(i)}-u}{b} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^r \exp\left\{\frac{x_{(i)}-u}{b}\right\} - (n-r) \exp\left\{\frac{x_{(r)}-u}{b}\right\}\right) \quad (2.12) \end{aligned}$$

Fungsi kepadatan bersama di atas didefinisikan sebagai fungsi *likelihood* untuk u dan b .

2.6 Sensor Tipe I untuk Distribusi Weibull dan Distribusi Nilai Ekstrim

Misalkan T_i merupakan waktu hidup dan L_i merupakan waktu sensor yang ditetapkan untuk individu ke- i sampel acak dari n individu. Satu observasi hanya untuk $t_i = \min\{T_i, L_i\}$ dimana hasil observasi dapat berupa waktu hidup sebenarnya (waktu teramati) ataupun waktu sensor, sehingga nantinya akan dihasilkan n sampel berpasangan (Lawless, 1982).

Menentukan penyensoran tipe I untuk distribusi Weibull sama seperti pada penyensoran tipe II akan lebih mudah dilakukan apabila menggunakan distribusi Nilai Ekstrim. Misalkan diasumsikan T_i berdistribusi Weibull dan $X = \log T_i$ berdistribusi Nilai Ekstrim dengan parameter u dan b . Misalkan

pula $\eta_i = \log L_i$, $x_i = \log t_i$, dan $\delta_i = 1$ atau 0 , $t_i = T_i$ atau $t_i = L_i$, maka fungsi *likelihood* dari distribusi Nilai Ekstrim berdasarkan sampel tersensor tipe I adalah sebagai berikut (Lawless, 1982).

$$L(u, b) = \prod_{i=1}^n f(x_i)^{\delta_i} S(L_i)^{1-\delta_i} \\ = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{b} \exp \left\{ \frac{x_i - u}{b} \right\} - \exp \left\{ \frac{x_i - u}{b} \right\} \right)^{\delta_i} \left(\exp \left\{ -\exp \left\{ \frac{\eta_i - u}{b} \right\} \right\} \right)^{1-\delta_i} \quad (2.13)$$

Misalkan $r = \sum \delta_i$

$$L(u, b) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{b} \exp \left\{ \frac{x_i - u}{b} \right\} - \exp \left\{ \frac{x_i - u}{b} \right\} \right)^r \left(\exp \left\{ -\exp \left\{ \frac{\eta_i - u}{b} \right\} \right\} \right)^{1-r}$$

2.7 Maximum Likelihood Estimation (Estimasi Maksimum Likelihood)

Maximum likelihood estimation atau dikenal juga sebagai metode estimasi maksimum *likelihood* adalah salah satu metode yang paling sering digunakan untuk mencari nilai estimasi parameter dari suatu distribusi (Diantoro, 2013)

Definisi 2.5 (Somayasa, 2008)

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n merupakan n variabel acak dengan X_i mempunyai fungsi kepadatan peluang $f_{X_i}(\cdot; \theta_1, \dots, \theta_k)$, $\theta_1, \dots, \theta_k \in \Theta$, $i = 1, \dots, n$. Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n merupakan data atau suatu realisasi dari X_1, X_2, \dots, X_n , maka $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_k)$ disebut fungsi *likelihood*. Sebagai kejadian yang lebih khusus, jika X_1, X_2, \dots, X_n merupakan suatu sampel acak, maka

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

Selanjutnya, nilai-nilai dari $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in \Theta$ yang dinyatakan sebagai $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ sedemikian hingga

$$L(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k) = \max_{\theta_1, \dots, \theta_k \in \Theta} L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

disebut estimasi maksimum *likelihood*. Biasanya $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ merupakan fungsi dari data x_1, x_2, \dots, x_n , misalkan sebagai $\hat{\theta}_j = t_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, k$. Jika fungsi-fungsi ini kita terapkan terhadap sampel acak X_1, \dots, X_n , maka $\hat{\theta}_j = t_j(X_1, \dots, X_n)$ disebut estimator maksimum *likelihood* (engl. *Maximum Likelihood Estimator*) disingkat MLE untuk $\hat{\theta}_j$, $j = 1, \dots, k$.

Berdasarkan Definisi 2.5 jelas bahwa permasalahan menentukan MLE termasuk permasalahan optimasi. Nilai-nilai dari $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ memberikan global maksimum dari $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ pada Θ . Karena nilai-nilai dari $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ yang memaksimumkan $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ juga

memaksimumkan log-likelihood $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, maka untuk memudahkan perhitungan akan diperhatikan fungsi $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ saja (Somayasa, 2008).

Adapun langkah yang digunakan untuk mendapatkan estimasi parameter dengan metode estimasi maksimum *likelihood* adalah sebagai berikut (Salsinha, 2012).

- 1) Mendefinisikan fungsi *likelihood* $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$
- 2) Mengoperasikan fungsi *likelihood* dengan logaritma natural $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$
- 3) Mendiferensialkan $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ terhadap $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ dan menyamakan derivatifnya dengan nol.
- 4) Menyelesaikan derivatif tersebut dalam $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ dan akan diperoleh $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$.

2.8 Uji Goodness of Fit untuk Sampel Tersensor

Menurut Swanepoel dan Graan (2002) uji *goodness of fit* dapat digambarkan sebagai metode yang digunakan untuk memeriksa seberapa cocok sampel data dengan distribusi tertentu sebagai populasinya.

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n variabel acak dari suatu populasi dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x) = P(X \leq x)$ yang tidak diketahui. Masalah utama yang diperhatikan pada uji ini adalah menguji hipotesis untuk $F(x)$ dengan format berikut (Swanepoel dan Graan, 2002).

$$H_0: F(x) = F_0(x) \quad (2.14)$$

dengan $F_0(x)$ adalah keluarga model yang ditentukan. Biasanya $F(x)$ memuat parameter yang tidak diketahui, tetapi terkadang sudah ditentukan sebelumnya.

Misalkan X adalah variabel acak distribusi kontinu dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ dan dengan hipotesis (2.14) bahwa $F(x) = F_0(x)$, di mana $F_0(x)$ adalah beberapa keluarga dari fungsi distribusi. Pertama-tama diperhatikan kasus di mana data tidak tersensor dan $F_0(x)$ ditentukan (tidak mengandung parameter yang tidak diketahui). Diberikan sampel acak X_1, \dots, X_n dari distribusi untuk X . Fungsi $\tilde{F}_n(x)$ yang dimiliki sebagai

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{\text{banyaknya}\{x_i \leq x\}}{n}$$

adalah fungsi distribusi empiris dari sampel. Salah satu statistik uji yang digunakan untuk menguji H_0 dengan berdasar pada pengukuran “jarak” antara $\tilde{F}_n(x)$ dan $F_0(x)$ adalah statistik Kolmogorov-Smirnov sebagai berikut (Lawless, 1982).

$$D_n^+ = \sup_x [\tilde{F}_n(x) - F_0(x)]$$

$$D_n^- = \sup_x [F_0(x) - \tilde{F}_n(x)]$$

$$D_n = \sup_x |\tilde{F}_n(x) - F_0(x)| = \max\{D_n^+, D_n^-\}.$$

Menurut D’Agustino dan Stephens (1986) statistik fungsi distribusi empiris ini juga telah

diadaptasi untuk bentuk penyensoran. Pada penelitian ini digunakan/dipertimbangkan kasus dimana distribusi yang diuji katakanlah $F(x)$ sepenuhnya ditentukan. Misalkan $Y_i = F(X_i)$ dan X mengalami penyensoran kanan, untuk penyensoran tipe I; nilai X diketahui lebih kecil dari nilai L yang ditetapkan, dan Y_i yang diketahui adalah $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(r)} \leq t$, dimana $t = F(L)$. Untuk penyensoran tipe 2, terdapat pula nilai r untuk Y_i , dengan $Y_{(r)}$ terbesar dan r tetap.

Misalkan data mengalami penyensoran tipe I pada L , maka statistik Kolmogorov-Smirnov yang dimodifikasi untuk penyensoran tipe I ini adalah

$${}_1D_{t,n} = \sup_{0 \leq y \leq t} |F_n(y) - y|$$

$$= \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{i}{n} - Y_{(i)}, Y_{(i)} - \frac{i-1}{n}, t - \frac{r}{n} \right\} \quad (2.15)$$

dengan $F_n(y)$ adalah fungsi distribusi empiris dari r nilai Y terurut.

Statistik Kolmogorov-Smirnov untuk penyensoran tipe II adalah sebagai berikut.

$${}_2D_{r,n} = \sup_{0 \leq y \leq Y_{(r)}} |F_n(y) - y|$$

$$= \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{i}{n} - Y_{(i)}, Y_{(i)} - \frac{i-1}{n} \right\}. \quad (2.16)$$

Adapun algoritma statistik Kolmogorov-Smirnov adalah sebagai berikut. Misalkan data mengalami penyensoran kanan, dengan H_0 berikut H_0 : sampel tersensor $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(r)}$ berasal dari distribusi kontinu $F(x)$ yang spesifik.

dan $Y_{(i)} = F(X_{(i)})$, $i = 1, \dots, r$. Maka langkah yang dilakukan untuk menguji H_0 adalah sebagai berikut.

Untuk penyensoran tipe I:

- (1) Hitung ${}_1D_{t,n}$
- (2) Modifikasi ${}_1D_{t,n}$ menjadi D_t^* , dimana $D_t^* = \sqrt{n} {}_1D_{t,n} + \frac{0.19}{\sqrt{n}}$, untuk $n \geq 25$ dan $p = t \geq 0.25$
- (3) Lihat Tabel 1 dan tolak H_0 pada tingkat signifikansi α jika D_t^* melebihi nilai tabulasi untuk α .

Untuk penyensoran tipe II:

- (1) Hitung ${}_2D_{r,n}$
- (2) Modifikasi ${}_2D_{r,n}$ menjadi D_r^* , dimana $D_r^* = \sqrt{n} {}_2D_{r,n} + \frac{0.24}{\sqrt{n}}$, untuk $n \geq 25$ dan $p = \frac{r}{n} \geq 0.4$
- (3) Lihat Tabel 1 dan tolak H_0 pada tingkat signifikansi α jika D_r^* melebihi nilai tabulasi untuk α .

2.9 Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson merupakan salah satu metode yang sering digunakan untuk menghampiri penyelesaian persamaan $f(x) = 0$ secara iteratif. Metode Newton-Raphson ini menggunakan sebuah hampiran awal dan turunannya untuk mendapatkan

nilai hampiran berikutnya. (Vulandari, 2017). Menurut Rochmad (2013) konsep dasar teoritis metode Newton-Raphson secara analisis dilakukan dengan pemotongan (*truncation*) fungsi pada deret Taylor. Penurunan rumus Newton-Raphson dengan deret Taylor adalah sebagai berikut

Uraikan $f(x_{r+1})$ di sekitar x_r ke dalam deret Taylor,

$$f(x_{r+1}) = f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} f''(x_r) + \dots$$

Hampiran akar persamaan diperoleh dengan memotong suku-suku deret mulai dari suku ke-3, sehingga menjadi

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r)$$

untuk $f(x_{r+1}) = 0$ diperoleh

$$0 \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) \Leftrightarrow x_{r+1}$$

$$\approx x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, f'(x_r) \neq 0$$

Adapun algoritma metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut.

- (1) Definiskan fungsi $f(x)$ dan $f'(x)$
- (2) Tentukan toleransi *error* (e) dan iterasi maksimum (n)
- (3) Tentukan nilai pendekatan awal x_0
- (4) Hitung $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$
- (5) Untuk iterasi $r = 1, \dots, n$ berlaku $x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$
Hitung $f(x_r)$ dan $f'(x_r)$
- (6) Akar persamaannya adalah nilai x_{r+1} yang terakhir diperoleh.
- (7) Iterasi berhenti jika $|x_{r+1} - x_r| \leq e$.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Estimasi Parameter Distribusi Weibull

Pada bagian ini akan dibahas estimasi parameter distribusi Weibull berdasarkan sampel tersensor tipe II dan tipe I menggunakan metode estimasi maksimum *likelihood*.

3.1.1 Sampel Tersensor Tipe II

Berdasarkan Persamaan (2.12) diperoleh fungsi *likelihood* untuk u dan b adalah sebagai berikut.

$$L(u, b) = \frac{n!}{(n-r)! b^r} \exp \left(\sum_{i=1}^r \frac{x_{(i)} - u}{b} - \sum_{i=1}^r * \exp \left\{ \frac{x_{(i)} - u}{b} \right\} \right) \quad (3.1)$$

dimana digunakan notasi

$$\sum_{i=1}^r * w_{(i)} = \sum_{i=1}^r w_{(i)} + (n-r)w_{(r)} \quad (3.2)$$

untuk $w_{(1)}, w_{(2)}, \dots, w_{(r)}$ terurut. Maka logaritma fungsi *likelihood*-nya adalah

$$\ln L(u, b) = \ln \left(\frac{n!}{(n-r)!} \right) - r \ln b + \sum_{i=1}^r \frac{x_{(i)} - u}{b}$$

$$-\sum_{i=1}^r * \exp\left\{\frac{x_{(i)} - u}{b}\right\}. \quad (3.3)$$

Penduga maksimum *likelihood* untuk u dan b diperoleh dari penyelesaian $\frac{\partial \ln L(u,b)}{\partial u} = 0$ dan $\frac{\partial \ln L(u,b)}{\partial b} = 0$.

$$\frac{\partial \ln L(u,b)}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow e^u = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r * \exp\left\{\frac{x_{(i)}}{b}\right\}\right)^b. \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \ln L(u,b)}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^r * x_{(i)} \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)}{\sum_{i=1}^r * \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)} - b - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_{(i)} = 0 \quad (3.5)$$

Maka MLE untuk parameter θ dan β dari distribusi Weibull, dimana $u = \ln \theta$ dan $b = \frac{1}{\beta}$ atau $\theta = e^u$ dan $\beta = \frac{1}{b}$ adalah sebagai berikut.

$$\theta = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r * t_i^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (3.6)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^r * t_{(i)}^\beta \ln t_{(i)}}{\sum_{i=1}^r * t_{(i)}^\beta} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln t_{(i)} = 0 \quad (3.7)$$

Untuk memperoleh nilai dari \hat{u} dan \hat{b} berdasarkan solusi pada (3.4) dan (3.5), ternyata tidak dapat diselesaikan secara analitik untuk \hat{b} , oleh sebab itu untuk menyelesaikannya harus digunakan metode numerik. Adapun metode numerik yang kita gunakan adalah metode Newton-Raphson sebagai berikut.

$$f(b) = \frac{\sum_{i=1}^r * x_{(i)} \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)}{\sum_{i=1}^r * \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)} - b - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_{(i)} = 0$$

$$f'(b) = \frac{\left(-\frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^r * x_{(i)}^2 \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)\right) \sum_{i=1}^r * \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)}{\left(\sum_{i=1}^r * \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)\right)^2}$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^r * x_{(i)} \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)\right) \sum_{i=1}^r * x_{(i)} \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)}{\left(\sum_{i=1}^r * \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)\right)^2} - 1 = 0$$

$$\hat{b}_{j+1} = \hat{b}_j - \frac{f(\hat{b}_j)}{f'(\hat{b}_j)}$$

Apabila nilai \hat{b} telah diperoleh dengan metode Newton-Raphson, maka nilai \hat{u} dapat diperoleh dengan mensubstitusi \hat{b} pada Persamaan (3.4), dengan demikian maka nilai penduga parameter $\hat{\theta}$ dan $\hat{\beta}$ dari distribusi Weibull dengan mudah diperoleh, yaitu $\hat{\theta} = e^{\hat{u}}$ dan $\hat{\beta} = \frac{1}{\hat{b}}$.

Selanjutnya akan ditentukan aproksimasi interval kepercayaan untuk u dan b yang ditentukan oleh (\hat{u}, \hat{b}) menjadi distribusi normal bivariat dengan *mean*(u, b) dan covarian matriks I_0^{-1} . Lebih jelasnya dapat dilihat pada prosedur di bawah ini.

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix}, I_0^{-1} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix} \sim N_2(0, I_0^{-1})$$

$$\Rightarrow I_0^{\frac{1}{2}} \left(\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix} \right) \sim N_2 \left(0, I_0^{\frac{1}{2}} I_0^{-1} I_0^{\frac{1}{2}} \right) = N_2(0, I_{2 \times 2})$$

dimana $I_{2 \times 2}$ adalah matriks identitas berukuran 2×2

$$\Rightarrow \left(I_0^{\frac{1}{2}} \left(\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix} \right) \right)^T \left(I_0^{\frac{1}{2}} \left(\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix} \right) \right) \sim \chi_{(2)}^2$$

Jadi,

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{b} \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix}^T \end{pmatrix} I_0^{-1} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T I_0 \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix} \end{pmatrix} \sim \chi_{(2)}^2.$$

dengan I_0 adalah matriks informasi pengamatan

$$I_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u^2} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u \partial b} \\ -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u \partial b} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} \end{pmatrix}_{(\hat{u}, \hat{b})}$$

Bentuk I_0 sederhana dengan $\hat{z}_i = \frac{x_i - \hat{u}}{\hat{b}}$, sehingga

$$-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u^2} \Big|_{(\hat{u}, \hat{b})} = \frac{1}{\hat{b}^2} \sum_{i=1}^r * e^{\hat{z}_i}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} \Big|_{(\hat{u}, \hat{b})} = \frac{1}{\hat{b}^2} \left(-r - 2 \sum_{i=1}^r \hat{z}_i + 2 \sum_{i=1}^r * \hat{z}_i e^{\hat{z}_i} + \sum_{i=1}^r * \hat{z}_i^2 e^{\hat{z}_i} \right)$$

$$-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u \partial b} \Big|_{(\hat{u}, \hat{b})} = \frac{1}{\hat{b}^2} \left(-r + \sum_{i=1}^r * e^{\hat{z}_i} + \sum_{i=1}^r * \hat{z}_i e^{\hat{z}_i} \right).$$

Maka, interval kepercayaan untuk u dan b adalah

$$\hat{u} \sim N(u, (I_0^{-1})_{11})$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{u} - u}{\sqrt{(I_0^{-1})_{11}}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow P \left\{ Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{u} - u}{\sqrt{(I_0^{-1})_{11}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P \left\{ \hat{u} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{11}} \geq u \geq \hat{u} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{11}} \right\} = 1 - \alpha. \quad (3.8)$$

$$\hat{b} \sim N(b, (I_0^{-1})_{22})$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{b} - b}{\sqrt{(I_0^{-1})_{22}}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow P \left\{ Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{b} - b}{\sqrt{(I_0^{-1})_{22}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P \left\{ \hat{b} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{22}} \geq b \geq \hat{b} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{22}} \right\} = 1 - \alpha. \quad (3.9)$$

dimana $(I_0^{-1})_{ii}$ adalah elemen baris ke- i dan kolom ke- i dari invers matriks informasi.

Dengan demikian, dapat pula ditentukan interval kepercayaan untuk θ dan β pada tingkat signifikansi α , dimana $\theta = \exp(u)$ dan $\beta = \frac{1}{b}$ dan diperoleh

$$P\left\{e^{\hat{u}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(I_0^{-1})_{11}}} \geq \theta \geq e^{\hat{u}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(I_0^{-1})_{11}}}\right\} = 1 - \alpha \quad (3.10)$$

$$P\left\{\frac{1}{\left(\hat{b}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(I_0^{-1})_{22}}\right)} \leq \beta \leq \frac{1}{\left(\hat{b}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(I_0^{-1})_{22}}\right)}\right\} = 1 - \alpha. \quad (3.11)$$

lebih lanjut, misalkan

$$e^{\hat{u}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(I_0^{-1})_{11}}} = A_1, \quad \frac{1}{\left(\hat{b}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(I_0^{-1})_{22}}\right)} = B_1$$

$$e^{\hat{u}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(I_0^{-1})_{11}}} = A_2, \quad \frac{1}{\left(\hat{b}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(I_0^{-1})_{22}}\right)} = B_2$$

dan dengan Persamaan (3.10) dan (3.11) dapat diperoleh interval kepercayaan pada tingkat signifikansi α untuk fungsi *survival* $s(t)$, fungsi hazard $h(t)$ dan kuantil ke- pt_p sebagai berikut.

$$P\left\{e^{-\left(\frac{t}{A_1}\right)^{B_1}} \leq s(t) \leq e^{-\left(\frac{t}{A_2}\right)^{B_2}}\right\} = 1 - \alpha \quad (3.12)$$

$$P\left\{\frac{B_1}{A_1}\left(\frac{t}{A_1}\right)^{B_1-1} \leq h(t) \leq \frac{B_2}{A_2}\left(\frac{t}{A_2}\right)^{B_2-1}\right\} = 1 - \alpha \quad (3.13)$$

$$P\left\{\frac{A_1}{B_1}(-\log(1-p)) \leq t_p \leq \frac{A_2}{B_2}(-\log(1-p))\right\} = 1 - \alpha \quad (3.14)$$

3.1.2 Sampel Tersensor Tipe I

Berdasarkan persamaan (2.13) fungsi *likelihood* untuk u dan b berdasarkan sampel tersensor tipe I sebagai berikut.

$$L(u, b) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{b} \exp\left\{\frac{x_{(i)}-u}{b} - \exp\left\{\frac{x_{(i)}-u}{b}\right\}\right\}\right)^{\delta_i} \left(\exp\left\{-\exp\left\{\frac{\eta_{(i)}-u}{b}\right\}\right\}\right)^{1-\delta_i}$$

Misalkan $r = \sum \delta_i$ dinotasikan sebagai jumlah waktu hidup yang diamati dan D dinotasikan sebagai kelompok dari individu-individu yang memiliki nilai $\delta_i = 1$, yaitu individu yang waktu hidupnya tidak tersensor, sehingga

$$\ln L(u, b) = -r \ln b + \sum_{i \in D} \frac{x_i - u}{b} - \sum_{i=1}^n \exp\left\{\frac{x_i - u}{b}\right\} \quad (3.15)$$

Perhatikan bahwa $\ln L(u, b)$ sama persis dengan kasus penyensoran tipe II pada (3.3), karena pada kasus terakhir x_r adalah waktu sensor untuk $n - r$ individu yang waktu hidupnya tidak teramati. Oleh sebab itu, persamaan maksimum *likelihood*-nya akan sama dengan (3.4) dan (3.5), dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp\left(\frac{x_i}{b}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_i}{b}\right)} - b - \frac{1}{r} \sum_{i \in D} x_i = 0 \quad (3.16)$$

$$e^u = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \exp\left\{\frac{x_i}{b}\right\}\right)^b \quad (3.17)$$

Maka MLE untuk parameter θ dan β dari distribusi Weibull, dimana $x_i = \ln t_i$ $u = \ln \theta$ dan $b = \frac{1}{\beta}$ atau $\theta = e^u$ dan $\beta = \frac{1}{b}$ adalah sebagai berikut.

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta \ln t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{r} \sum_{i \in D} \ln t_i = 0. \quad (3.18)$$

$$\theta = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^n t_i^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (3.19)$$

Persamaan (3.16) dapat diselesaikan dengan melakukan iterasi untuk \hat{b} , kemudian \hat{u} diperoleh dari (3.17). Penyelesaian untuk Persamaan (3.16) dilakukan menggunakan metode Newton-Raphson sebagai berikut.

$$f(b) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp\left(\frac{x_i}{b}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_i}{b}\right)} - b - \frac{1}{r} \sum_{i \in D} x_i = 0$$

$$f'(b) = \frac{\left(-\frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n x_{(i)}^2 \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)\right) \left(\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)\right)^2} - \frac{\left(-\frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n x_{(i)} \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)\right) \left(\sum_{i=1}^n x_{(i)} \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_{(i)}}{b}\right)\right)^2}$$

$$-1 = 0$$

$$\hat{b}_{j+1} = \hat{b}_j - \left[\frac{f(\hat{b}_j)}{f'(\hat{b}_j)}\right].$$

Seperti pada penyensoran tipe II, apabila nilai \hat{b} telah diperoleh dengan metode Newton-Raphson, maka nilai \hat{u} dapat diperoleh dengan mensubstitusi \hat{b} pada Persamaan (3.17), dengan demikian maka nilai penduga parameter $\hat{\theta}$ dan $\hat{\beta}$ dari distribusi Weibull dengan mudah diperoleh, yaitu $\hat{\theta} = e^{\hat{u}}$ dan $\hat{\beta} = \frac{1}{\hat{b}}$.

Estimasi interval untuk sampel tersensor tipe I, memiliki prosedur yang sama dengan estimasi interval pada sampel tersensor tipe II, yaitu ditentukan oleh (\hat{u}, \hat{b}) menjadi distribusi normal bivariat dengan mean (u, b) dan covarian matriks I_0^{-1} , yang membedakan hanyalah elemen-elemen pada matriks informasi I_0 . Adapun matriks informasi untuk sampel tersensor tipe I adalah

$$I_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u^2} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u \partial b} \\ -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u \partial b} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} \end{pmatrix}_{(\hat{u}, \hat{b})}$$

Bentuk I_0 sederhana dengan $\hat{z}_i = \frac{x_i - \hat{u}}{\hat{b}}$ memberikan

$$-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u^2} \Big|_{(\hat{u}, \hat{b})} = \frac{1}{\hat{b}^2} \sum_{i=1}^n e^{\hat{z}_i}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} \Big|_{(\hat{u}, \hat{b})} = \frac{1}{\hat{b}^2} \left(-r - 2 \sum_{i \in D} \hat{z}_i + 2 \sum_{i=1}^n \hat{z}_i e^{\hat{z}_i} + \sum_{i=1}^n \hat{z}_i^2 e^{\hat{z}_i} \right)$$

$$-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial u \partial b} \Big|_{(\hat{u}, \hat{b})} = \frac{1}{\hat{b}^2} \left(-r + \sum_{i \in D} e^{\hat{z}_i} + \sum_{i=1}^n \hat{z}_i e^{\hat{z}_i} \right).$$

Dengan demikian maka interval kepercayaan pada tingkat signifikansi α untuk u, b, θ, β , untuk penyensoran tipe I yang memiliki bentuk yang sama dengan penyensoran tipe II, yaitu sebagai berikut

$$P \left\{ \hat{u} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(\mathbf{I}_0^{-1})_{11}} \geq u \geq \hat{u} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(\mathbf{I}_0^{-1})_{11}} \right\} = 1 - \alpha. \tag{3.20}$$

$$P \left\{ \hat{b} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(\mathbf{I}_0^{-1})_{22}} \geq b \geq \hat{b} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(\mathbf{I}_0^{-1})_{22}} \right\} = 1 - \alpha. \tag{4.21}$$

$$P \left\{ e^{\hat{u} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(\mathbf{I}_0^{-1})_{11}}} \geq \theta \geq e^{\hat{u} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(\mathbf{I}_0^{-1})_{11}}} \right\} = 1 - \alpha \tag{3.22}$$

$$P \left\{ \frac{1}{\left(\hat{b} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(\mathbf{I}_0^{-1})_{22}} \right)} \leq \beta \leq \frac{1}{\left(\hat{b} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(\mathbf{I}_0^{-1})_{22}} \right)} \right\} = 1 - \alpha \tag{3.23}$$

3.2 Analisis dan Penerapan Estimasi Parameter Distribusi Weibull

Pada bagian ini akan ditentukan estimasi parameter distribusi Weibull dari Data Waktu Survival Pasien Hepatitis C dan Data Waktu Remisi Pasien Leukimia berdasarkan penyensoran tipe II dan I, serta akan ditunjukkan penerapan estimasi parameter

3.2.1 Penerapan Estimasi Parameter Sampel Tersensor Tipe II

Misalkan terdapat 50 penderita yang terinfeksi Hepatitis C. Dari 50 penderita diambil sebanyak 30 pengamatan pertama yang ditentukan dahulu sebelum pengamatan dilakukan. Diperoleh 30 data yang meninggal karena terinfeksi Hepatitis C dan 20 data tersensor. Waktu $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(30)}$ merupakan waktu *survival* penderita Hepatitis C yang pertama, kedua sampai ke-30 meninggal dalam pengamatan. Waktu individu yang masih dapat bertahan hidup setelah T_{30} , yaitu T_{31}, \dots, T_{50} merupakan data tersensor dari penderita Hepatitis C (Santoso dkk, 2016). Adapun data waktu *survival* 30 penderita adalah sebagai berikut.

Tabel 3.1 Data Waktu *Survival* Pasien Hepatitis C

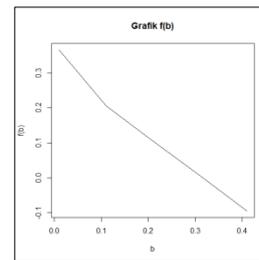
No	t (bulan)	No	t (bulan)	No	t (bulan)
----	----------------	----	----------------	----	----------------

1	113,931	11	212,354	21	290,310
2	126,944	12	226,583	22	297,448
3	133,892	13	230,758	23	302,131
4	148,848	14	234,784	24	305,658
5	151,443	15	240,199	25	308,177
6	168,973	16	243,139	26	313,801
7	176,643	17	246,193	27	313,841
8	202,794	18	250,369	28	316,217
9	210,501	19	257,510	29	318,145
10	210,501	20	265,204	30	333,250

Berdasarkan data pada Tabel 3.1 akan ditentukan penduga parameter θ dan β dari distribusi Weibull. Pertama-tama akan dilakukan transformasi T_i yang berdistribusi Weibull menjadi $X_i = \ln T_i$ yang berdistribusi Nilai Ekstrim dan diperoleh 4.7355, 4.8437, 4.8970, 5.0029, 5.0202, 5.1297, 5.1741, 5.3122, 5.3495, 5.3583, 5.4231, 5.4414, 5.4586, 5.4815, 5.4936, 5.5061, 5.5229, 5.5511, 5.5805, 5.6709, 5.6952, 5.7108, 5.7225, 5.7306, 5.7487, 5.7488, 5.7564, 5.7625 dan 5.8088. Pendugaan parameter ini dilakukan dengan metode maksimum *likelihood* seperti pada Persamaan (3.5) dan (3.4) untuk menentukan parameter \hat{b} dan \hat{u} dari distribusi Nilai Ekstrim. Penyelesaian Persamaan (3.5) dapat diperoleh dengan menggunakan metode Newton-Raphson dan juga metode grafik.

Berdasarkan metode Newton-Raphson yang dijalankan dengan *software* R diperoleh nilai dari $\hat{b} = 0.3044$. Dengan demikian, karena nilai dari \hat{b} telah diketahui, maka nilai dari \hat{u} dapat diperoleh dengan mensubstitusi $\hat{b} = 0.3044$ ke Persamaan (3.4) dan diperoleh $\hat{u} = 5.8336$. Maka estimasi parameter dari θ dan β dari distribusi Weibull, dimana $u = \ln \theta$ dan $b = \frac{1}{\beta}$ atau $\hat{\theta} = e^{\hat{u}}$ dan $\hat{\beta} = \frac{1}{\hat{b}}$ adalah 341.5849 dan 3.2851.

Estimasi parameter untuk \hat{b} dapat pula diperoleh dengan metode grafik, yaitu dengan memperhatikan titik dimana $f(b) = 0$ seperti grafik di bawah ini.



Gambar 3.1 Grafik $f(b)$ Data Pasien Hepatitis

Pada Gambar 3.1 dapat dilihat bahwa $f(b) = 0$ diperkirakan diperoleh pada saat $\hat{b} = 0.31$, maka $\hat{u} = 5.8354$, sehingga diperoleh penduga parameter untuk distribusi Weibull $\hat{\theta} = e^{\hat{u}} = 342.2015$ dan $\hat{\beta} = \frac{1}{\hat{b}} = 3.2256$.

Sebelum melanjutkan analisis untuk estimasi interval akan lebih dahulu dilakukan uji *goodness of fit* untuk mengecek apakah data yang digunakan dalam penelitian ini berasal dari populasi distribusi Weibull atau tidak. Adapun statistik yang digunakan untuk uji *goodness of fit* pada penelitian ini adalah statistik Kolmogorov-Smirnov dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- (1) Menentukan hipotesis
 H_0 : populasi berdistribusi Weibull
 H_1 : populasi tidak berdistribusi Weibull
- (2) Menghitung nilai statistik ${}_2D_{r,n}$, dimana

$${}_2D_{r,n} = \sup_{0 \leq y \leq Y_{(r)}} |F_n(y) - y|$$

$$= \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{i}{n} - Y_{(i)}, Y_{(i)} - \frac{i-1}{n} \right\}$$

dengan $Y_{(i)} = F(t_i) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\theta} \right)^\beta \right\}$,

$\theta = 341.5849$ dan $\beta = 3.2851$.

Untuk mempermudah perhitungan digunakan Tabel 2 (lihat Lampiran) dan diperoleh ${}_2D_{r,n} = 0.0574$.

- (3) Modifikasi ${}_2D_{r,n}$ menjadi D_r^* , dimana

$$D_r^* = \sqrt{n} {}_2D_{r,n} + \frac{0.24}{\sqrt{n}} = \sqrt{50}(0.0574) + \frac{0.24}{\sqrt{50}}$$

$$= 0,4398$$

- (4) Membandingkan D_r^* dengan nilai $\sqrt{n}D$ pada Tabel 2.1, misalkan $\alpha = 0.005$ dan $p = \frac{r}{n} = \frac{30}{50} = 0.6$, maka $\sqrt{n}D = 1.7056$.

- (5) Kesimpulan

H_0 diterima pada tingkat signifikansi $\alpha = 0.005$, karena $D_r^* < \sqrt{n}D$ atau $0,4398 < 1.7056$, artinya populasi berdistribusi Weibull.

Berdasarkan Persamaan (3.8), (3.9), (3.10) dan (3.11) akan ditentukan estimasi interval untuk u, b, θ dan β dari Data Waktu *Survival* Pasien Hepatitis C. Dengan menggunakan *software* R diperoleh matriks informasi dan inversnya sebagai berikut.

$$I_0 = \begin{pmatrix} 323.7529 & 221.3555 \\ 221.3555 & 430.0500 \end{pmatrix}$$

$$I_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0047 & -0.0025 \\ -0.0025 & 0.0036 \end{pmatrix}$$

diperoleh $(I_0^{-1})_{11} = 0.0047$ dan $(I_0^{-1})_{22} = 0.0036$. Misalkan diambil $\alpha = 1\%$, $\hat{b} = 0.3044$ dan $\hat{u} = 5.8336$, maka

$$P \left\{ \hat{u} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{11}} \geq u \geq \hat{u} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{11}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P \{ 6.0114 \geq u \geq 5.6558 \} = 99\%$$

Jadi, interval kepercayaan $(1 - \alpha)100\%$ atau 99% untuk u adalah $[5.6558, 6.0114]$ dan interval kepercayaan untuk $\theta = \exp \{u\}$ adalah $[285.9364, 408.0635]$.

Selanjutnya, untuk b

$$P \left\{ \hat{b} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{22}} \geq b \geq \hat{b} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{22}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P \left\{ 0.3044 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.0036} \geq b \right.$$

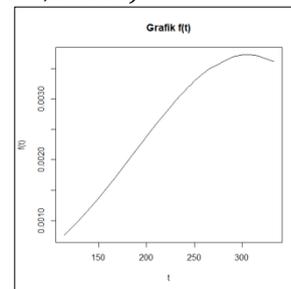
$$\left. \geq 0.3044 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.0036} \right\}$$

$$= 99\%$$

$$\Leftrightarrow P \{ 0.4587 \geq b \geq 0.1501 \} = 99\%$$

Maka, interval kepercayaan $(1 - \alpha)100\%$ atau 99% untuk u adalah $[0.1501, 0.4587]$ dan interval kepercayaan untuk $\beta = \frac{1}{b}$ adalah $[2.1801, 6.6616]$.

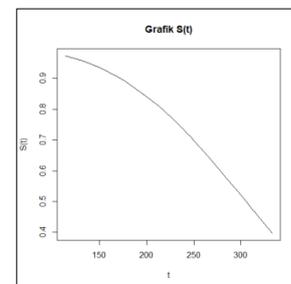
Setelah dilakukan estimasi parameter untuk θ dan β dari Data Waktu *Survival* Pasien Hepatitis C yang berdistribusi Weibull, yaitu 341.5849 dan 3.2851, maka pada bagian ini akan ditunjukkan bagaimana interpretasi atau penerapannya. Perhatikan Gambar 3.2, merupakan grafik dari fungsi kepadatan peluang dari distribusi *WEI*(341.5849, 3.2851).



Gambar 3.2 Grafik FKP Waktu *Survival* Pasien Hepatitis C

Berdasarkan Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa semakin bertambahnya nilai t , maka peluang kematian pada pasien hepatitis C juga akan semakin besar hingga $t = 306$ bulan yaitu sekitar $0.0037 = 0.37\%$ dan akan menurun setelah melawati 306 bulan. Artinya, kematian pada pasien hepatitis C paling banyak terjadi pada saat $t = 306$ bulan dengan peluang kematiannya sekitar 0.37% .

Fungsi *survival* $S(t)$, yaitu peluang suatu individu untuk bertahan hidup atau *survive*. Fungsi *survival* untuk distribusi Weibull dinyatakan sebagai $S(t) = \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\theta} \right)^\beta \right\}$ memiliki grafik sebagai berikut.



Gambar 3.3 Grafik Fungsi *Survival* Pasien Hepatitis C

Pada Gambar 3.3 terlihat nilai $S(t)$ mengalami penurunan seiring bertambahnya nilai t , misalnya

pada saat $t = 0$ dapat dilihat bahwa $S(0) = 1$ atau peluang individu bertahan hidup pada saat sebelum terinfeksi adalah pasti, sedangkan pada saat $t = 333,25$ bulan $S(333,25) = 0.3977$ artinya peluang pasien bertahan hidup setelah terinfeksi 333,25 bulan adalah sekitar 39%, sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin lama seorang pasien terinfeksi hepatitis C, maka peluang atau kemampuan pasien bertahan hidup akan semakin kecil.

3.2.2 Penerapan Estimasi Parameter Sampel Tersensor Tipe I

Pada Tabel 3.2 di bawah ini menunjukkan waktu remisi dari 21 pasien leukimia yang diberikan obat 6-mercaptopurine (6-MP). Hasil uji klinis obat 6-MP sehubungan dengan kemampuan untuk mempertahankan remisi pada pasien leukimia akut. Pengamatan yang berbintang adalah waktu penyensoran; untuk pasien yang penyakitnya masih dalam keadaan remisi hingga akhir penelitian, yang mana pada penelitian ini terdapat 12 waktu penyensoran. Adapun waktu remisi dari 21 pasien leukimia tersebut adalah sebagai berikut.

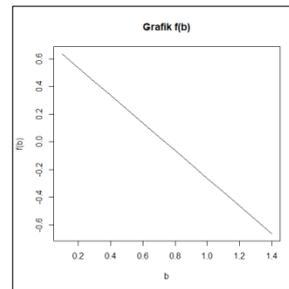
Tabel 3.2 Data Waktu Remisi Pasien Leukimia

Pasien ke- i	Waktu Remisi (Minggu)	Pasien ke- i	Waktu Remisi (Minggu)
1	6	12	17*
2	6	13	19*
3	6	14	20*
4	6*	15	22
5	7	16	23
6	9*	17	25*
7	10	18	32*
8	10*	19	32*
9	11*	20	34*
10	13	21	35*
11	16		

Berdasarkan data pada Tabel 3.2 akan ditentukan penduga parameter θ dan β dari distribusi Weibull berdasarkan penyensoran tipe I. Pendugaan parameter ini dilakukan dengan metode maksimum *likelihood* seperti pada Persamaan (3.16) dan (3.17) untuk menentukan \hat{b} dan \hat{u} , yang nantinya akan ditransformasi menjadi $\hat{\theta} = e^{\hat{u}}$ dan $\hat{\beta} = \frac{1}{\hat{b}}$. Penyelesaian Persamaan (3.16) dapat diselesaikan secara iteratif dengan metode Newton-Raphson dan juga metode grafik untuk menentukan \hat{b} .

Berdasarkan iterasi dengan metode Newton-Raphson pada *software* R diperoleh nilai dari $\hat{b} = 0.7387$, maka nilai dari \hat{u} dapat diperoleh dengan mensubstitusi \hat{b} ke Persamaan (3.17) dan diperoleh $\hat{u} = 3.5194$. Maka estimasi parameter dari θ dan β dari distribusi Weibull, $\hat{\theta} = e^{\hat{u}}$ dan $\hat{\beta} = \frac{1}{\hat{b}}$ adalah 33.7648 dan 1.3537.

Sementara itu dengan metode grafik estimasi parameter untuk \hat{b} dapat dilakukan dengan memperhatikan titik dimana $f(b) = 0$ seperti grafik di bawah ini.



Gambar 3.4 Grafik $f(b)$ Data Waktu Remisi Pasien Leukimia

Berdasarkan Gambar 3.4 dapat diperkirakan bahwa $f(b) = 0$ adalah pada saat $\hat{b} = 0.73$, sehingga $\hat{u} = 3.5144$, dengan demikian maka penduga parameter untuk distribusi Weibull adalah $\hat{\theta} = e^{\hat{u}} = 33.5957$ dan $\hat{\beta} = \frac{1}{\hat{b}} = 1.3698$.

Selanjutnya dengan Persamaan (3.20) dan (3.21) akan ditentukan estimasi interval parameter dari Data Waktu Remisi Pasien Leukimia untuk u dan b . Dengan menggunakan program R diperoleh I_0 sebagai berikut.

$$I_0 = \begin{bmatrix} 16.4941 & -9.5235 \\ -9.5235 & 29.1448 \end{bmatrix}$$

Maka invers I_0

$$I_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0747 & 0.0244 \\ 0.0244 & 0.0423 \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat diperoleh $(I_0^{-1})_{11} = 0.0747$ dan $(I_0^{-1})_{22} = 0.0423$. misalkan diambil $\alpha = 5\%$, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.9599$, maka interval kepercayaan 95% untuk u dan b adalah

$$P \left\{ \hat{u} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{11}} \geq u \geq \hat{u} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{11}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P \left\{ 3.5194 - Z_{0.025} \sqrt{0.0747} \geq u \geq 3.5194 - Z_{0.975} \sqrt{0.0747} \right\} = 95\%$$

$$\Leftrightarrow P \{ 4.0552 \geq u \geq 2.9836 \} = 95\%$$

Jadi, interval kepercayaan 95% untuk u adalah $[2.9836, 4.0552]$, maka interval kepercayaan untuk θ adalah $[19.7596, 57.6967]$.

Kemudian untuk b

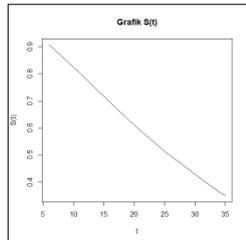
$$P \left\{ \hat{b} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{22}} \geq b \geq \hat{b} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{22}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P \left\{ 0.7387 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.0423} \geq b \geq 0.7387 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.0423} \right\} = 95\%$$

$$\Leftrightarrow P \{ 2.9795 \geq b \geq 0.8758 \} = 95\%$$

Jadi, interval kepercayaan 95% untuk b adalah $[0.8758, 2.9795]$, maka interval kepercayaan untuk β adalah $[2.9795, 19.7596]$.

Setelah dilakukan estimasi parameter untuk θ dan β dari Data Waktu Remisi Pasien Leukimia yang berdistribusi Weibull, yaitu adalah 33.7648 dan 1.3537, maka sama seperti pada penyensoran tipe II akan ditunjukkan bagaimana interpretasi atau penerapannya.



Gambar 3.5 Grafik Fungsi *Survival* Waktu Remisi Pasien Leukimia

Perhatikan Gambar 3.5 diperlihatkan grafik fungsi *survival* dari waktu remisi pasien leukimia. Berdasarkan grafik tersebut ditunjukkan bahwa semakin besar waktu t , maka akan semakin kecil peluang untuk mempertahankan waktu remisi.

4. Penutup

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada Bagian 3, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Estimasi parameter dari distribusi Weibull berdasarkan penyensoran tipe II dan tipe I dapat dilakukan dengan metode maksimum *likelihood* untuk estimasi titiknya dan prosedur asimtotik distribusi Normal untuk MLE untuk menentukan estimasi intervalnya diperoleh hasil estimasi sebagai berikut.

Penyensoran tipe II:

$$\theta = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r t_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^r t_i^\beta \ln t_i}{\sum_{i=1}^r t_i^\beta} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln t_i = 0$$

Penyensoran tipe I:

$$\theta = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta \ln t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{r} \sum_{i \in D} \ln t_i = 0$$

Sementara itu estimasi interval parameter yang diperoleh berdasarkan penyensoran tipe II dan I memiliki bentuk yang sama, yang membedakan hanyalah elemen dari matriks I_0^{-1} , yaitu

$$P \left\{ e^{\hat{u} - Z_{1-\alpha} \sqrt{(I_0^{-1})_{11}}} \geq \theta \geq e^{\hat{u} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{11}}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$P \left\{ \frac{1}{(\hat{b} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{22}})} \leq \beta \leq \frac{1}{(\hat{b} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{(I_0^{-1})_{22}})} \right\} = 1 - \alpha$$

2. Penerapan dari parameter estimasi maksimum *likelihood* distribusi Weibull pada Data Penderita Hepatitis C dan Data Waktu Remisi Pasien Leukimia adalah dengan estimasi parameter yang diperoleh, maka dapat diketahui bagaimana peluang kematian dan kemampuan bertahan hidup dari tiap individu seiring bertambahnya waktu t .

4.2 Saran

Pada penelitian ini penulis menunjukkan estimasi parameter distribusi Weibull berdasarkan sampel sensor tipe II dan tipe I, maka untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan agar peneliti menunjukkan estimasi parameter untuk distribusi lain, misalnya distribusi Log-Logistik atau dengan tipe penyensoran lain seperti penyensoran tipe II progresif.

Daftar Pustaka

- Chan, Y., Han, B. dan Pascual, F. "Monitoring the Weibull Shape Parameter with Type II Censored Data". *Quality and Reliability Engineering International*. 2014: Wiley Online Library.
- Diantoro, A. 2013. *Model Statistik untuk Data Pencemaran Udara oleh Ozon Ekstrem di Pekanbaru*. Pekanbaru: Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
- D'Agustino, R. B. dan Stephens, M. A. 1986. *Goodness-of-Fit Techniques*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- Harlan, J. 2017. *Analisis Survival*. Depok: Penerbit Gunadarma.
- Kleinbaum, D. G. dan Klein, M. 2005. *Survival Analysis: A Self-Learning Text Second Edition*. New York: Springer.
- Kurniasih, E. 2014. *Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier Secara Maximum Likelihood*. Malang: Universitas Islam Negeri Malik Ibrahim Malang.
- Kusumawardhani, G. E., Suyono dan Santi, M. V. 2018. *Analisis Survival dengan Model Regresi pada Data Tersensor Berdistribusi Log-logistik*. *Jurnal Statistika dan Aplikasinya*. 2(2):2620-8369.
- Lawless, J. F. 1982. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. Amerika Serikat: Wiley.

Lawless, J. F. 2011. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data Second Edition*. Amerika Serikat: John Wiley & Sons.

Nurlaila, D., Kusnandar, D., dan Sulistianingsih, E. 2013. *Perbandingan Metode Maximum Likelihood Estimation (MLE) dan Metode BAYES DALAM Pendugaan Parameter Distribusi Ekspensial*. Jurnal Ilmiah Mat. Stat. Dan Terapannya. **2**(1):51-56.

Otaya, L. G. 2016. *Distribusi Probabilitas Weibull dan Aplikasinya (Pada Persoalan Keandalan (Reliability) dan Analisis Rawatan (Maintainability))*. Jurnal Manajemen Pendidikan Islam. **4**(2).

Purba, S. A. 2018. *Maksimum Likelihood Berdasarkan Algoritma Newton Raphson, Fisher Scoring dan Expectation Maximization*. Medan: Universitas Sumatera Utara.

Riyandianci, N. 2017. *Analisis Survival pada Pasien Penderita Kanker Serviks di RSUD dr. Soetomo Surabaya Menggunakan Stratified COX dan Extended COX*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Rochmad. 2013. *Aplikasi Metode Newon-Raphson untuk Menghampiri Solusi Persamaan Non Linear*. Jurnal MIPA. **36**(2): 193-200.

Salsinha, N. 2012. *Distribusi Weibull: Sifat-Sifat dan Aplikasinya dalam Analisis Data Waktu Hidup dan Pengendalian Mutu*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Santoso, B., Respatiwan dan Kusmayadi, T. A. 2016. *Analisis Tahan Hidup Data Tersensor Tipe II Menggunakan Distribusi Weibull pada Penderita Hepatitiss C*. Surakarta: Universitas Sebelas Maret.

Sari, N. W. W., Wahyuningsih, S. dan Goejantoro, R. 2013. *Model Proposional Hazard Cox dengan Pendekatan Bayesian (Studi Kasus: Pasien Rawat Inap Demam Berdarah Dengue di Rumah Sakit Daerah Abdul Wahid Sjahranie Samarinda)*. Jurnal Ekspensial. **4**(1):2085-7829.

Somayasa, I. W. 2008. *Diktat Kuliah Statistika Matematika I*. Kendari: Universitas Halu Oleo.

Swanepoel, J. W. H. Dan Graan, F. C. 2002. *Goodness-of-Fit Tests Based on Elimated Expectations of Probability Integral Transformed Order Statistics*. Statistics Journal. **54**(3):531-542.

Vulandari, R. V. 2017. *Metode Numerik – Teori, Kasus, dan Aplikasi*. Surabaya: Mavendra Pers.

Widiharih, T. dan Mardjiyanti, W. 2008. *Inferensi Data Uji Hidup Tersensor Tipe II Berdistribusi Reyleigh*. Jurnal Statistka. **1**(2):69-74.

Lampiran

Tabel 1. Nilai \sqrt{nD}

		Significance level α				
		0.25	0.15	0.10	0.05	0.025
		.6465	.7443	.8155	.9268	1.0282
		.7663	.8784	.9597	1.0868	1.2024
		.8544	.9746	1.0616	1.1975	1.3209
		.9196	1.0438	1.1334	1.2731	1.3997
		.9666	1.0914	1.1813	1.3211	1.4476
		.9976	1.1208	1.2094	1.3471	1.4717
		1.0142	1.1348	1.2216	1.3568	1.4794
		1.0190	1.1379	1.2238	1.3581	1.4802
		1.0192	1.1379	1.2238	1.3581	1.4802

Tabel 2. ${}_2D_{r,n}$

No	t	$\frac{i}{n}$	$\frac{i-1}{n}$	Y_i	$\frac{i}{n} - Y_{(i)}$	$Y_{(i)} - \frac{i-1}{n}$
1	113,931	0,02	0	0,0268	0,0068	0,0268
2	126,944	0,04	0,02	0,0380	0,0020	0,0180
3	133,892	0,06	0,04	0,0451	0,0149	0,0051
4	148,848	0,08	0,06	0,0632	0,0168	0,0032
5	151,443	0,1	0,08	0,0668	0,0332	0,0132
6	168,973	0,12	0,1	0,0943	0,0257	0,0057
7	176,643	0,14	0,12	0,1083	0,0317	0,0117
8	202,794	0,16	0,14	0,1650	0,0050	0,0250
9	210,501	0,18	0,16	0,1844	0,0044	0,0244
10	210,501	0,2	0,18	0,1844	0,0156	0,0044
11	212,354	0,22	0,2	0,1893	0,0307	0,0107
12	226,583	0,24	0,22	0,2287	0,0113	0,0087
13	230,758	0,26	0,24	0,2409	0,0191	0,0009
14	234,784	0,28	0,26	0,2531	0,0269	0,0069
15	240,199	0,3	0,28	0,2698	0,0302	0,0102
16	243,139	0,32	0,3	0,2791	0,0409	0,0209
17	246,193	0,34	0,32	0,2890	0,0510	0,0310
18	250,369	0,36	0,34	0,3026	0,0574	0,0374

19	257,51	0,38	0,36	0,3265	0,0535	0,0335
20	265,204	0,4	0,38	0,3530	0,0470	0,0270
21	290,31	0,42	0,4	0,4435	0,0235	0,0435
22	297,448	0,44	0,42	0,4699	0,0299	0,0499
23	302,131	0,46	0,44	0,4874	0,0274	0,0474
24	305,658	0,48	0,46	0,5005	0,0205	0,0405
25	308,177	0,5	0,48	0,5099	0,0099	0,0299
26	313,801	0,52	0,5	0,5308	0,0108	0,0308
27	313,841	0,54	0,52	0,5310	0,0090	0,0110
28	316,217	0,56	0,54	0,5398	0,0202	0,0002
29	318,145	0,58	0,56	0,5469	0,0331	0,0131
30	333,25	0,6	0,58	0,6023	0,0023	0,0223

Diterima pada tanggal 15 September 2022.
Terbit online pada tanggal 30 Desember 2022