ANALISIS MODEL MATEMATIKA MANGSA-PEMANGSA HOLLING TIPE II DENGAN FAKTORPEMANENAN DAN DAYA DUKUNG LINGKUNGAN

Yosiana Daud[1)], Edi Cahyono[1)], Norma Muhtar[1)], Asrul sani[1)] dan Arman[1)]
[1)]Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
E-mail: ana.daud.yd@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana model matematika mangsa-pemangsa Holling tipe II dengan faktor pemanenan dan daya dukung lingkungan. Dalam penelitian ini, telah ditetapkan model matematika mangsa-pemangsa Holling tipe II dengan faktor pemanenan dan daya dukung lingkungan dengan asumsi yang diberikan.

Kata Kunci: *Mangsa-Pemangsa, Fungsi Respon Holling Tipe II, Pemanenan, Daya Dukung Lingkungan*.

ABSTRACT

This study aims to find out how the mathematical model of Holling type II prey-predators with harvesting factors and environmental carrying capacity. In this study, a mathematical model of prey-predators holling type II with harvesting factors and environmental carrying capacity has been established with given assumptions.

Keywords:*Prey-Predator, Holling Type II Functional Response, Harvesting, Carrying Capacity.*

1. Pendahuluan

Ekologi merupakan cabang ilmu yang membahas interaksi antar sesama makhluk hidup dengan lingkungannya serta menganut prinsip keseimbangan seluruh komponen alam. Dalam ilmu lingkungan, ekologi menjadi ilmu dasar untuk memahami interaksi di dalam lingkungan. Bentuk interaksi ini berupa cara suatu makhluk hidup beradaptasi untuk dapat memanfaatkan lingkungannya. Mahluk hidup membutuhkan energi dan materi yang konstan untuk bertahan hidup sehingga interaksi selalu melibatkan materi dan energi. Interaksi makhluk hidup yang terjadi di dalam ekosistem mencakup kegiatan predasi, kompetisi, dan kerjasama. Predasi merupakan hubungan antara mangsa (*Prey*) dan pemangsa (*Predator*). Nyatanya dalam kegiatan interaksi makhluk hidup, waktu bagi pemangsa untuk memproses makanan tidak dapat diabaikan.

Dalam ilmu matematika, model yang menggambarkan hubungan predasi dikenal dengan model mangsa-pemangsa atau model *prey-predator*. Model ini pertamakali dikenalkan oleh Alfred J. Lotka (1925) dan Vito Volterra (1926), dimana dalam model ini populasi mangsa bertindak sebagai sumber makanan untuk populasi pemangsa.

Dalam pengembangannya, model mangsa-pemangsa telah banyak mengalami modifikasi seperti menambahkan beberapa asumsi-asumsi baru. Salah satu asumsi yang umum digunakan adalah fungsi respon pemangsa yang diperkenalkan Holling pada tahun 1950, yaitu banyaknya mangsa yang dimakan oleh pemangsa sebagai fungsi kepadatan mangsa. Fungsi respon Holling terbagi dalam tiga tipe, yakni fungsi respon tipe I yang terjadi pada pemangsa yang memiliki karakteristik pasif, fungsi respon tipe II yang terjadi pada pemangsa yang memiliki karakteristik aktif, dan fungsi respon tipe III terjadi pada pemangsa yang cenderung akan mencari populasi mangsa yang lain ketika populasi mangsa utamanya mulai berkurang.

Penambahan fungsi respon ini akan berakibat pada pertumbuhan populasi mangsa yang akan mengalami penurunan akibat adanya hubungan predasi tersebut. Untuk menggambarkan pertumbuhan suatu populasi, pada tahun 1980 Verhulst memperkenalkan suatu model pertumbuhan logistik. Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi yang mempertimbangkan keterbatasan lingkungan, sehingga laju pertumbuhan populasi tergantung pada kerapatan populasinya (Rohaeni, 2017).

Pemanenan adalah kegiatan campur tangan manusia dengan tujuan untuk mengontrol populasi makhluk hidup agar tidak melebihi kapasitas daya tampungnya serta dapat memberikan manfaat dari hasil yang dipanen. (Panigoro, 2013) memvariasikan model pemanenan terhadap model dinamik pertumbuhan eksponensial yakni model eksponensial dengan pemanenan konstan, model eksponensial dengan pemanenan linear, dan model eksponensial dengan pemanenan kuadratik.

2. Kajian Pustaka

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang membahas tentang suatu fungsi yang akan dicari beserta turunannya, (Bronson & Costa, 2007). Apabila persamaan tersebut hanya memuat satu variabel bebas maka persamaan disebut dengan persamaan diferensial biasa, sedangkan jika memuat dua atau lebih variabel bebas maka disebut persamaan diferensial parsial (Delima, 2020). Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang di dalamnya terdapat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dengan n merupakan bilangan bulat positif sama dengan dua atau lebih (Finizio & Ladas, 1982).

2.2 Model dasar Mangsa-Pemangsa

Model mangsa-pemangsa Lotka Volterra pertama kali diperkenalkan oleh Alfred J. Lotka dan Vito Volterra. Model tersebut menggambarkan persaingan antara pemangsa dan mangsa. Misalkan $x = x(t)$ mewakili populasi mangsa pada saat t, dan $y = y(t)$ mewakili populasi pemangsa pada saat t, maka model mangsa-pemangsa Lotka Volterra dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \beta xy\end{aligned} \tag{1}$$

dengan r, α, c, β adalah konstanta bernilai positif, $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$ adalah laju pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa pada saat t. r adalah laju pertumbuhan mangsa ketika tidak ada pemangsa dan c adalah laju kematian dari pemangsa ketika tidak ada mangsa, sedangkan $-\alpha xy$ adalah laju kematian populasi mangsa saat berinteraksi dengan populasi pemangsa dan βxy adalah laju bertambahnya populasi pemangsa saat berinteraksi dengan populasi mangsa(Marom, 2013).

Persamaan (1) menghasilkan relasi antara x dan y sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{1}{dx/dt} = \frac{y(\beta x - c)}{x(r - \alpha y)} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\beta x - c}{x} \times \frac{y}{r - \alpha y}\end{aligned} \tag{2}$$

Dengan menggunakan metode pemisah variabel, persamaan (2) ekuivalen dengan

$$\int \frac{r - \alpha y}{y} d = \int \frac{\beta x - c}{x} dx \tag{3}$$

Persamaan (3) memberikan solusi dalam bentuk

$$r \ln y - \alpha y + k_1 = \beta x - c \ln x + k_2$$

dimana k_1, k_2 adalah konstanta

$$r \ln y - \alpha y = \beta x - c \ln x + k_2 - k_1$$

$$r \ln y - \alpha y = \beta x - c \ln x + K'$$

dimana $K' = k_2 - k_1$

$$r \ln y + c \ln x = \beta x + \alpha y + K' \tag{4}$$

Kedua ruas pada persamaan(4)di eksponensialkan, sehingga diperoleh

$$e^{(r \ln y + c \ln x)} = e^{(\beta x + \alpha y + K')}$$

$$e^{r \ln y} . e^{c \ln x} = e^{\beta x + \alpha y} . e^{K'}$$

$$y^r . x^c = e^{\beta x + \alpha y} . K \text{dimana } K = e^{K'}$$

Sehingga diperoleh solusi

$$K = \frac{y^r . x^c}{e^{\beta x + \alpha y}} \tag{5}$$

Dengan K merupakan parameter

Persamaan (5) disebut trayektori dari $x(t)$ dan $y(t)$ pada bidang fase xy(Cahyono & Arman, 2021).

2.3 Model Pertumbuhan Logistik

Verhulst (1838), menuturkan bahwa pertumbuhan populasi dibatasi oleh ukuran dan kesuburan dari daerah yang menjadi tempat tinggal dari populasi. Model seperti ini dinamakan model logistik yang dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dX}{dt} = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right) \tag{6}$$

Dengan $X = X(t)$ adalah jumlah populasi pada saat t, r adalah laju pertumbuhan intrinsik. Diasumsikan $r > 0$ karena setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak, dan K menyatakan kapasitas tampung yaitu ukuran maksimum dari suatu populasi yang dapat di dukung oleh suatu lingkungan(Hofbauer & Sigmund, 1988).

2.4 Model Holling

Holling (1950) memperkenalkan fungsi respon. Fungsi respon dalam ekologi adalah banyaknya makanan yang akan dimakan oleh predator sebagai fungsi kepadatan. Fungsi respon dibagi atas 3 macam, yaitu

1. Fungsi Respon Tipe I

Terjadi pada pemangsa yang memiliki karakteristik pasif atau lebih suka menunggu mangsanya. Diasumsikan bahwa waktu mencari dan memproses makanan di abaikan secara bersamaan. Secara umum dimodelkan sebagai berikut

$$f(x) = ax \tag{7}$$

dengan $x \geq 0$ adalah kepadatan populasi mangsa dan $a \geq 0$ adalah laju interaksi populasi mangsa dan pemangsa(Mukhopadhyay & Bhattacharyya, 2016).

2. Fungsi Respon Tipe II

Terjadi pada pemangsa yang memiliki karakteristik aktif dalam mencari mangsanya. Fungsi ini telah memperhitungkan waktu untuk memproses makanan pada saat pemangsa mengkonsumsi makanannya. Hal ini ditandai dengan melambatnya tingkat serangan yang dilakukan pemangsa terhadap mangsa. Secara umum dimodelkan sebagai berikut

$$f(x) = \frac{ax}{1+bx} \tag{8}$$

dengan $x \geq 0$ adalah kepadatan pemangsa, $a \geq 0$ adalah laju interaksi populasi mangsa dan pemangsa, dan $b \geq 0$ adalah titik jenuh mangsa(Gupta & Chandra, 2013).

3. Fungsi Respon Tipe III

Terjadi pada pemangsa yang cenderung akan mencari populasi mangsa yang lain ketika populasi mangsa utamanya yang dimakan cenderung berkurang sehingga variabel mangsa menjadi P^2 dan menyebabkan laju populasi lebih cepat. Secara umum dimodelkan sebagai berikut

$$f(x) = \frac{ax^2}{c+x^2} \tag{9}$$

dengan $x \geq 0$ adalah kepadatan populasi mangsa, $a \geq 0$ adalah laju interaksi populasi mangsa dan pemangsa, dan $c \geq 0$ adalah *half-saturation constant*(Ndam et al., 2012).

2.5 Model Umum Pemanenan

Menurut Panigoro (2013) ada tiga model pemanenan yaitu pemanenan Konstan, Pemanenan Linier, dan Pemanenan Kuadratik. Dalam penelitian ini yang akan digunakan adalah model Pemanenan Linier. Pemanenan Linier yaitu pemanenan dengan hasil panen yang meningkat secara linier setiap tahunnya. Berikut model eksponensial dengan pemanenan linier

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - hN(t) \tag{10}$$

dimana $N(t) > 0$ adalah jumlah populasi sepanjang $t \geq 0$ dengan pemanenan linier $h > 0$ dan laju pertumbuhan intrinsik $r > 0$(Panigoro, 2013).

3. Hasil dan Pembahasan

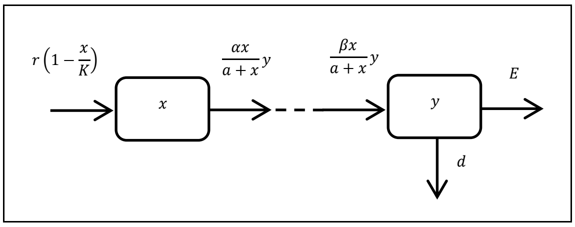
3.1 Model Holling Tipe II dengan Daya Dukung Lingkungan dan Pemanenan Pemangsa

Berikut diberikan asumsi-asumsi dalam kontruksi model mangsa pemangsa Holling tipe II dengan faktor daya dukung lingkungan dan pemanenan pada pemangsa.

1. Laju pertumbuhan mangsa merupakan model pertumbuhan logistik.
2. Populasi mangsa akan berkurang, karena terjadi pemangsaan oleh pemangsa.
3. Populasi pemangsa akan mengalami pertumbuhan akibat dari mengkonsumsi mangsa, namun dibatasi waktu untuk mencari dan menangani mangsanya.
4. Pemangsa akan mengalami kematian alami, akibat dari persaingan memperebutkan mangsa yang semakin berkurang.
5. Laju pemanenan pemangsa sebanding dengan populasinya yang meningkat secara linear setiap satuan waktu.

Dengan mengasumsikan bahwa $x(t)$ adalah populasi mangsa saat t, $y(t)$ adalah populasi pemangsa saat t dan besaran-besaran $r, \alpha, \beta, d, E, K$ dalam pembentukan model juga diasumsikan positif.

Berikut skema model mangsa-pemangsa Holling tipe II dengan faktor daya dukung lingkungan dan pemanenan pada pemangsa.



Gambar 4.1. Model dengan pemanenan pemangsa

Error! Reference source not found. menunjukkan bahwa pertumbuhan mangsa diasumsikan mengikuti model logistik ketika tidak ada interaksi antara mangsa-pemangsa, serta daya dukung sebesar K dengan tingkat pertumbuhan mangsa sebesar r maka mangsa mengalami pertumbuhan dengan laju $rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$. Ketika terdapat interaksi antara mangsa dan pemangsa sebesar $f(x)$ maka pertumbuhan mangsa akan mengalami penurunan sebesar $f(x)y$ yang merupakan laju perkalian antara respon fungsi holling tipe II dengan populasi pemangsa y menjadi $f(x)y = \frac{\alpha xy}{a+x}$.

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+x} \tag{11}$$

Penurunan populasi pemangsa terjadi ketika tidak terdapatnya mangsa x, dengan laju kematian alami pemangsa sebesar d, mengakibatkan populasi pemangsa akan berkurang sebesar dy. Ketika terjadi interaksi antara mangsa dan pemangsa sebesar $f(x)$ maka pertumbuhan pemangsa akan mengalami peningkatan sebesar $f(x)y$ yang merupakan laju perkalian antara respon fungsi holling tipe II dengan populasi pemangsa y menjadi $f(x)y = \frac{\beta xy}{a+x}$.

Selanjutnya populasi pemangsa akan mengalami pemanenan sebesar E, mengakibatkan populasi pemangsa akan berkurang sebesar Ey.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta xy}{a+x} - dy - Ey \tag{12}$$

Berdasarkan persamaan (11**)** dan (12), maka model mangsa-pemangsa dengan pemanenan pada pemangsa pada akhirnya dapat diperoleh sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+x} \tag{13}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta xy}{a+x} - dy - Ey$$

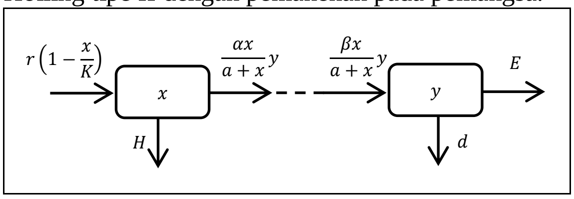
3.2 Model Holling Tipe II dengan Daya Dukung Lingkungan dan Pemanenan pada Man gsa dan Pemangsa

Berikut diberikan asumsi-asumsi dalam kontruksi model mangsa pemangsa Holling tipe II dengan faktordaya dukung lingkungan dan pemanenan pada pemangsa.

1. Laju pertumbuhan mangsa merupakan model pertumbuhan logistik.
2. Populasi mangsa akan berkurang, karena terjadi pemangsaan oleh pemangsa.
3. Populasi pemangsa akan mengalami pertumbuhan akibat dari mengkonsumsi mangsa, namun dibatasi waktu untuk mencari dan menangani mangsanya.
4. Pemangsa akan mengalami kematian alami, akibat dari persaingan memperebutkan mangsa yang semakin berkurang.
5. Laju pemanenan mangsa dan pemangsa sebanding dengan populasinya yang meningkat secara linear setiap satuan waktu.

Dengan mengasumsikan bahwa $x(t)$ adalah populasi mangsa saat t, $y(t)$ adalah populasi pemangsa saat t dan besaran-besaran $r, \alpha, \beta, d, E, H, K$ dalam pembentukan model juga diasumsikan positif.

Berikut skema model mangsa-pemangsa Holling tipe II dengan pemanenan pada pemangsa.



Gambar 4.2. Model dengan pemanenan pada mangsa dan pemangsa

Gambar 4.2 menunjukkan bahwa pertumbuhan mangsa diasumsikan mengikuti model logistik ketika tidak ada interaksi antara mangsa-pemangsa, serta daya dukung sebesar K dengan tingkat pertumbuhan mangsa sebesar r maka mangsa mengalami pertumbuhan dengan laju $rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$. Ketika terdapat interaksi antara mangsa dan pemangsa sebesar $f(x)$ maka pertumbuhan mangsa akan mengalami penurunan sebesar $f(x)y$ yang merupakan laju perkalian antara respon fungsi holling tipe II dengan populasi pemangsa y menjadi $f(x)y = \frac{\alpha xy}{a+x}$.

Selanjutnya populasi mangsa akan mengalami pemanenan sebesar H, mengakibatkan populasi mangsa akan berkurang sebesar Hx.

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - Hx \tag{14}$$

Penurunan populasi pemangsa terjadi ketika tidak terdapatnya mangsa x, dengan laju kematian alami pemangsa sebesar d, mengakibatkan populasi pemangsa akan berkurang sebesar dy. Ketika terjadi interaksi antara mangsa dan pemangsa sebesar $f(x)$ maka pertumbuhan pemangsa akan mengalami peningkatan sebesar $f(x)y$ yang merupakan laju perkalian antara respon fungsi holling tipe II dengan populasi pemangsa y menjadi $f(x)y = \frac{\beta xy}{a+x}$.

Selanjutnya populasi pemangsa akan mengalami pemanenan sebesar E, mengakibatkan populasi pemangsa akan berkurang sebesar Ey.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta xy}{a+x} - dy - Ey \tag{15}$$

Berdasarkan persamaan (24**)** dan (25**)**, maka model mangsa-pemangsa dengan pemanenan pada pemangsa akhirnya diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - Hx \tag{16}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta xy}{a+x} - dy - Ey$$

4. Penutup

4.1 Kesimpulan

Jadi dapat diperolehModel mangsa-pemangsa Holling tipe II dengan faktor daya dukung lingkungan.

a. Pemanenan pada mangsa

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+x}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta xy}{a+x} - dy - Ey$$

b. Pemanenan pada mangsa dan pemangsa

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - Hx$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta xy}{a+x} - dy - Ey$$

4.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh, penulis dapat memberikan saran yaitu agar penelitian selanjutnya lebih dikembangkan lagi dengan menambahkan faktor lain selain yang terdapat dalam penelitian iniseperti adanya mangsa sakit atau dengan asumsi-asumsi lain.

Ucapan Terimakasih. Penulis menyampaikan terimaksih yang setulus-tulusnya kepada dosen pembimbing atas segala perhatiannya sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik. Ucapan terimaksih juga penulis sampaikan kepada seluruh pihak yang turut andil dalam penelitian ini baik langsung maupun tidak langsung.

Daftar Pustaka

Bronson, R., & Costa, G. B. (2007). *Differential Equation* (Fourth). The McGraw-Hill Education.

Cahyono, E., & Arman. (2021). *Esensi dan Aplikasi Persamaan Diferensial Biasa*. NEM.

Delima, N. (2020). *Metode Numerik* (B. Miliyawati (ed.)). Unsub Press.

Finizio, N., & Ladas, G. (1982). An Introduction to Differential Equations. In Richard Jones (Ed.), *University of Rhode Island*. Wadsworth Publishing Company Belmont.

Gupta, R. P., & Chandra, P. (2013). Bifurcation Analysis of Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Michaelis-Menten Type Prey Harvesting. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *398*, 278–295.

Hofbauer, J., & Sigmund, K. (1988). *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press.

Marom, S. (2013). Pembentukan model mangsa pemangsa dengan pemanenan pada pemangsa. *Delta*, *1*(2), 115–199.

Mukhopadhyay, B., & Bhattacharyya, R. (2016). Effects Of Harvesting And predator Interference In A Model Of Two Predators Competing For A Single Prey. *Applied Mathematical Modeling*, *40*, 3264–3274.

Ndam, J. N., Chollom, J. P., & Kassem, T. G. (2012). A Mathematical Model of Three-Species Interactions in an Aquatic Habitat. *Applied Mathematics*, *4*, 1–11.

Panigoro, H. S. (2013). Variasi Pemanenan terhadap Model Dinamik Pertumbuhan Eksponensial. *Euler*, *1*(1), 59–65.

Rohaeni, O. (2017). Model Pertumbuhan Populasi Satu Spesies Dengan Tundaan Waktu Diskrit. *Jurnal Matematika*, *16*(1), 1–7.

Diterima pada tanggal 28 Mei 2022.
Terbit online pada tanggal 28 Juli 2022