Jurnal Matematika, Komputasi, dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 729 - 738, September - Desember 2024
ISSN : 2503-2984

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN MENGGUNAKAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA SISTEM VIBRASI

Isdar Fadiyah[1)]
[1)]Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email : isdarfadiyah11@gmail.com

Muh. Kabil Djafar[1,a)] dan **Herdi Budiman**[1,b)]
[1)]Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email : [a)] muh.kabiljafar@uho.ac.id, [b)] herdi.budiman@uho.ac.id

ABSTRAK

Benda yang bergetar banyak dijumpai dan digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Benda-benda tersebut terkadang mengganggu kenyamanan dan menurunkan kualitas kerjadi benda tersebut akibat getaran yang berlebihan. Hal yang dapat dilakukan adalah dengan meredam suatu getaran dengan memasang alat peredam. Hal yang penting yang perlu diketahui dalam meredam getaran adalah mengetahui karakteristik suatu benda dengan melihat solusinya. Penelitian ini bertujuan untuk mencari solusi dan kestabilan dari sistem vibrasi pada pegas saat adanya redaman kritis (c*riticaldamping*), redaman ringan (*underdamped*) dan redaman berlebihan (*overdamping*) serta tanpa adanya redaman. Metode penelitian yang digunakan dalam mencari solusi sistem vibrasi pada pegas adalah sistem persamaan diferensial dengan metode matriks. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah analisis kestabilan sistem vibrasi dengan adanya redaman kritis dengan melihat nilai eigen real negatif sehingga sistem bersifat Stabil. Analisis sistem vibrasi dengan adanya redaman ringan adalah analisis kestabilan yang diperoleh, sistem memiliki nilai eigen kompleks konjugat dengan nilai $-\zeta\omega_n < 0$ maka sistem bersifat stabil. Solusi sistem vibrasi dengan redaman berlebihan adalah analisis kestabilan yang diperoleh dengan sistem memiliki nilai eigen real dan berbeda tanda sehingga sistem tidak stabil. Solusi sistem vibrasi tanpa adanya redaman analisis kestabilan yang diperoleh dengan sistem memiliki nilai eigen imajiner murni sehingga sistem stabil secara alami.

Kata Kunci : sistem persamaan diferensial, vibrasi, pegas, redaman, dan analisis kestabilan.

ABSTRACT

Objects that vibrate are often found and used in everyday life. These objects sometimes interfere comfort and reduce the quality of work on these objects due to excessive vibration. The thing that can be done is to dampen a vibration by installing a damper. The important thing to know in damping vibrations is knowing the characteristics of an object by looking at the solution. This study aims to find solutions and stability of the vibration system on the spring when there is critical damping, underdamped and overdamping and without damping. The research method used in finding a solution to the vibration system on a spring is a system of differential equations using the matrix method. The results obtained from this study are the solution of the vibration system in the presence of critical damping is analysis the stability obtained by looking at the real negetive eigenvalues so that the system is stable. The solution for the vibration system in the presence of underdamped is stability analysis obtained, the system has a conjugate complex eigenvalue with a value of $-\zeta\omega_n < 0$ *then the system is stable. Solution of vibration system with overdamping is analysis the stability obtained with the system has real eigenvalues and different signs so that unstable system. The solution for a vibration system without damping is stability analysis obtained with the system having pure imaginary eigenvalues so that the system is naturally stable.*

Keyword *: differential equations systems, vibration, spring, damping, and analysis the stability*

1. Pendahuluan

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang bersifat deduktif. Konsep-konsep yang ada di dalam matematika bersifat terstruktur, logis dan sistematis dari konsep yang paling sederhana sampai konsep yang paling kompleks (Siagian, 2016). Matematika merupakan sumber dari ilmu yang lain, sehingga matematika disebut sebagai ratu atau ibunya ilmu pengetahuan. Banyak ilmu-ilmu yang penemuan dan pengembangannya bergantung dari matematika. Contoh, banyak teori-teori dan cabang-cabang dari fisika dan kimia modern yang ditemukan dan dikembangkan melalui konsep Kalkulus, khususnya tentang Persamaan Differensial (Ramdani, 2006).

Pemodelan matematika adalah suatu pengaplikasian matematika yang digunakan untuk mendeskripsikan suatu masalah di dunia nyata serta mengamati berbagai pertanyaan penting yang muncul dari pemodelan tersebut. Model matematika yang sering digunakan yaitu model Matematika dalam bentuk persamaan diferensial, baik itu persamaan diferensial biasa maupun parsial(Simanullang & Budhayanti, 2003)

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde (Boyce & DiPrima, 2009). Persamaan diferensial melibatkan besaran yang berubah secara kontinu dimodelkan oleh fungsi matematika dan laju perubahannya dinyatakan sebagai turunan diketahui. Persamaan diferensial merupakan dasar dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi (Hadi dkk., 2019).

Pegas dalam mekanika adalah sebuah perangkat yang dapat menyerap dan melepaskan energi bersama perubahan dalam bentuknya. Pegas dapat dibuat dalam berbagai jenis dan ukuran dari hampir semua bahan yang memiliki elastisitas (kemampuan untuk mendapatkan kembali bentuk dan ukuran setelah deformasi). Baja dan logam lainnya adalah bahan semi yang paling banyak digunakan sebagai pegas karena sifat elastisnya. Elemen-elemen dari sistem getaran adalah massa (m), pegas (k), peredam (c), dan eksitasi (F). Tiga elemen pertama menunjukkan kondisi fisik dari sistem (Rusianto,toto;Susastriawan, 2021).

Pada mekanika dan fisika, gerak harmonik sederhana adalah tipe khusus gerak periodik atau osilasi dimana gaya (F) berbanding lurus dengan perpindahan (x) dengan arah yang berlawanan dengan perpindahan (Aryani & Solihin, 2017). Gerakan harmonik sederhana dapat berfungsi sebagai model matematika untuk berbagai gerakan, seperti osilasi pegas. Selain itu, fenomena lain dapat didekati dengan gerakan harmonik sederhana, termasuk gerakan pendulum/bandul dan getaran molekul. Gerakan harmonik sederhana ditandai oleh gerakan massa pada pegas ketika dikenakan gaya pemulihan elastis linear yang diberikan oleh hukum Hooke (Saraswati, 2016).

Permasalahan yang sering Kita jumpai di bidang mekanik yaitu Sistemmekanik yang bekerja sering kali menimbulkan suatu permasalahan yang sulit dihindari yaitu getaran yang berlebihan. Getaran ini apabila tidak diantisipasi maka akan menyebabkan kegagalan fungsi pada mesin, perasaan tidak nyaman) dan suara yang mengganggu yang timbul dari sistem tersebut (Kurniawati, 2020).

Pada banyak hal biasanya terjadinya getaran sangat tidak diinginkan karena getaran dapat mengganggu kenyamanan, menimbulkan ketidak presisian atau menurunkan kwalitas kerja mesin-mesin perkakas. Bahkan getaran juga dapat merusak konstruksi mesin. Untuk itu banyak upaya dilakukan untuk meredam getaran. Meredam getaran pada dasarnya dapat dilakukan dengan meminimalkan gaya gaya eksitasi akan tetapi juga dapat dilakukan dengan memasang sistem peredam (Joni Dewanto, 1999).

Getaran (Vibrasi) pada Sistem pegas

Hukum Hooke : "*Jika pada sebuah pegas bekerja sebuah gaya, maka pegas tersebut akan bertambah panjang yang sebanding dengan gaya yang mempengaruhi pegas tersebut*".

Hukum Hooke dituliskan dalam persamaan :

$$F = -kx \tag{1}$$

Dengan :
F = gaya yang bekerja pada pegas (N)
k = konstanta pegas (N/m)
x = pertambahan panjang pegas (m)

Hukum Newton Dua : "*Percepatan (perubahan dari kecepatan) dari suatu benda akan sebanding dengan resultan gaya (jumlah gaya) yang bekerja pada benda tersebut dan berbanding terbalik dengan massa benda*".

Secara matematis hukum newton dua dapat ditulis :

$$\sum F = ma \text{ atau } \sum F = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2}$$

Dimana :
$\sum F$ = resultan gaya pada pegas (N)
m = massa benda (kg)
a = percepatan (m/s^2)

$x =$ perubahan posisi benda (m)

Berdasarkan Persamaan (1) dan Persamaan (2) diperoleh :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3)$$

disebut Persamaan Vibrasi Tanpa Redaman**.**

Pada benda yang bergetar lama kelamaan akan berhenti dan kembali ke posisi semula. Hal ini disebabkan karena adanya gaya luar yang menghambat laju benda, gaya tersebut adalah gaya gesek atau gaya redaman. Redaman yang terjadi pada benda mengakibatkan gaya tambahan pada benda yaitu

$$F = -cv \text{ atau } F = -c\dot{x} \quad (4)$$

dimana v merupakan kecepatan dan c adalah tetapan atau konstanta redaman.

Berdasarkan Persamaan (1), (2) dan (4) diperoleh pesamaan berikut,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (5)$$

Persamaan (5) disebut Persamaan Umum Vibrasi dengan Redaman.

Terdapat tiga jenis redaman (*damping)* yang dialami oleh benda yang berosilasi antara lain :

Redaman kritis (*critical damped*)

Redaman kritis adalah redaman yang terjadi ketika benda akan menuju ke titik kesetimbangannya dengan cepat tanpa melakukan gerak osilasi.

Persamaan (5) merupakan persamaan linear homogen orde yang dapat diselesaikan dengan cara berikut.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Misal dugaan solusi :

$$x = e^{\lambda t}$$
$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$$
$$\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Subtitusi dugaan solusi ke Persamaan (5) maka diperoleh

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + cre^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0$$

Karena $e^{\lambda t} \neq 0$, maka diperoleh

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (6)$$

Jadi solusi dari persamaan karakteristiknya :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}\right)}{2m} \quad (7)$$

Perhatikan nilai diskriminan atau persamaan berikut

$$c^2 - 4km = 0 \quad (8)$$

maka sistem disebut teredam kritis.

Berdasarkan Persamaan (8) maka diperoleh nilai c yang besarnya $2\sqrt{km}$ yang disebut koefisien redaman kritis atau dapat ditulis dengan persamaan berikut

$$C_c = 2\sqrt{km} \quad (9)$$

Selain itu, dalam sistem redaman juga dikenal istilah *damping ratio* (faktor redaman), atau ζ(zeta). *Damping ratio* adalah perbandingan koefisien redaman terhadap koefisien redaman kritis. Secara sistematis, *damping ratio* dapat ditulis,

$$\zeta = \frac{c}{C_c} \quad (10)$$

Pada sistem teredam kritis, karena $c = C_c$, maka nilai $\zeta = 1$.

Redaman ringan (*underdamped)*

Redaman ringan adalah suatu jenis redaman yang mana benda akan menuju ke titik kesetimbangannya pada saat benda berhenti berosilasi. Benda yang mengalami gaya hambatan akan sedikit demi sedikit akan menuju ke titik diamnya disaat energi dalam melakukan gerak osilasi telah diserap oleh gaya hambat tersebut.

Sama halnya dengan redaman kritis, pada redaman ringan terjadi jika persamaan diskrimananya adalah

$$c^2 < 4km \quad (11)$$

Redaman berlebihan (*overdamping*

Redaman berlebihan (*overdamping)* adalah redaman yang memiliki konsep dasar yang sama dengan redaman ringan, namun yang membedakan pada redaman kuat benda sejatinya tidak akan pernah menuju ke titik kesetimbangannya, melainkan hanya mendekati saja. Redaman berlebihan terjadi jika :

$$c^2 > 4km \quad (12)$$

Titik Equilibrium (Titik Kesetimbangan)

Titik kesetimbangan merupakan titik yang tidak berubah terhadap waktu. Artinya pada saat $t = 1,2,\ldots,n$, nilai titik tersebut akan tetap dan tidak berubah.

Definisi 1 : *Diberikan suatu persamaan diferensial orde satu* $\dot{x} = f(x)$, *yang mempunyai solusi, dengan kondisi awal* $x(0) = x_0$. *Suatu vektor* $\bar{x}$ *yang memenuhi* $f(\bar{x}) = 0$ *disebut titik equilibrium* (Juliah, 2015).

Pada bagian kedua dijelaskan tentang metode penelitian solusi persamaan diferensial dengan menggunakan sistem persamaan diferensial pada sistem vibrasi, selanjutnya pada bagian ketiga membahas hasil penelitian terkait solusi sistem vibrasi dan menganalisis sistem kestabilannya. Pada bagian keempat membahas kesimpulan dan saran berdasarkan hasil dan pembahasan pada bagian ketiga.

2. Metode

Penelitian ini dilaksanakan dari bulan Mei 2023 sampai bulan Juli 2023 bertempat di Laboratorium Penelitian Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Halu Oleo Kendari.

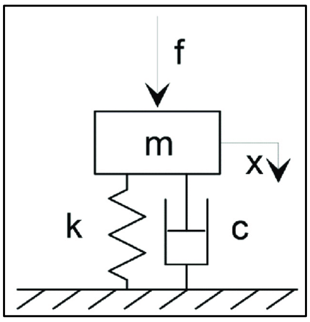
Metode penelitian yang dipakai dalam penelitian ini yaitu metode studi pustaka, literatur tentang Sistem Vibrasi pada Pegas. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini yaitu:

1. Mengkaji Sistem Vibrasi pada pegas dengan redaman dan tanpa redaman
2. Memberikan asumsi-asumsi awal sistem Vibrasi pegas
3. Menjabarkan model matematika Sistem Vibrasi pada Pegas.
4. Menganalisis model model matematika Sistem Vibrasi pada Pegas, dengan menentukan solusi dan titik ekuilibrium pada model serta menganalisis kestabilan pada titik ekuilibrium dari nilai eigen.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Sistem Vibrasi dengan Redaman

Asumsi yang digunakan pada sistem vibrasi dengan redaman pegas yang disusun secara vertikal dengan ujung pegas diberikan balok (benda) bermassa m dan terdapat gaya F yang menekan benda kebawah serta terdapat gaya hambatan dengan koefisien hambatan c yang aranya berlawanan dengan arah massa m. sistem ini dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 1 *Sistem Pegas Vertikal engan Redaman*

Model matematika sistem vibrasi dengan redaman adalah sebagai berikut.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

3.1.1 Solusi Sistem Vibrasi teredam kritis

Persamaan sistem vibrasi dengan redaman adalah persamaan diferensial linear homogen orde dua. Persamaan tersebut dapat diubah menjadi persamaan diferensial linear homogen orde satu dengan menggunakan sistem persamaan diferensial dengan metode matriks.

Langkah awal mencari solusi sistem persamaan diferensial dengan metode matriks yaitu mendefinisikan variabel baru

$$y = \dot{x} \tag{13}$$

Sehingga diperoleh $\ddot{x} = \dot{y}$. Lalu langkah selanjutnya subtitusi $\ddot{x} = \dot{y}$ pada Persamaan (4.1) maka diperoleh,

$$\dot{y} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y \tag{14}$$

Sistem persamaan diferensial yaitu :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y \end{aligned} \tag{15}$$

Misalkan $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$, maka Persamaan (15) dapat ditulis kedalam bentuk matriks berikut.

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{16}$$

dengan koefisien $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}$ (17)

Persamaan karakteristiknya dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut,

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0 \tag{18}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \tag{19}$$

Berdasarkan Persamaan karakteristik (19) diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \tag{20}$$

Karena sistem teredam kritis maka $c^2 - 4km = 0$, nilai karakteristik menjadi,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m} \tag{21}$$

Pada sistem teredam kritis, beberapa hal yang perlu diketahui adalah

$c = C_c = 2\sqrt{km}$, $\zeta = \frac{c}{C_c} = 1$ dan $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Sehingga,

$$-\frac{c}{2m} = -\omega_n \tag{22}$$

$$-\frac{c}{m} = -2\omega_n \tag{23}$$

Persamaan (21) dapat ditulis dalam bentuk berikut,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m} = -\omega_n$$

Vektor eigen dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{24}$$

Persamaan (24) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

Jurnal Matematika, Komputasi, dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 729 - 738, September - Desember 2024
ISSN : 2503-2984

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{c}{2m} & 0 \\ 0 & -\frac{c}{2m} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\omega_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\omega_n & 0 \\ 0 & -\omega_n \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_n & 1 \\ -\omega_n^2 & -\omega_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (25)$$

Untuk mencari solusi Persamaan (25) dapat menggunakan operasi baris elementer berikut,

$$\left|\begin{matrix} \omega_n & 1 & 0 \\ -\omega_n^2 & -\omega n & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{b_1 \times \frac{1}{\omega_n}} \left|\begin{matrix} 1 & \frac{1}{\omega_n} & 0 \\ -\omega_n^2 & -\omega n & 0 \end{matrix}\right|$$

$$\xrightarrow{b_2 + b_1(\omega_n^2)} \left|\begin{matrix} 1 & \frac{1}{\omega_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$$

Maka diperoleh :

$v_1 + \frac{1}{\omega_n} v_2 = 0$

$v_2 = -\omega_n v_1$

Ambil $v_1 = 1$, vektor eigen: $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_n \end{pmatrix}$ (26)

Misal $\boldsymbol{u}$ adalah vektor yang kedua maka berdasarkan kasus 3 (nilai eigen berulang) diperoleh persamaan :

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \quad (27)$$

Persamaan (4.16) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$\begin{pmatrix} \omega_n & 1 \\ -\omega_n^2 & -\omega_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_n \end{pmatrix} \quad (28)$$

Untuk mencari solusi Persamaan (28) dapat dilihat pada baris pertama.

Maka diperoleh :

$u_1\omega_n + u_2 = 1$

$u_2 = 1 - u_1\omega_n$

Misal $u_1 = s$, maka $u_2 = 1 - \omega_n s$, maka

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_n \end{pmatrix} s$

Pilih $s = 0$, maka $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (29)

Solusi Sistem persamaan diferensial :

$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}e^{(\lambda_1 t)}$

$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_n \end{pmatrix} e^{-\omega_n t}$

$\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{v}te^{\lambda t} + \boldsymbol{u}e^{\lambda t}$

$\boldsymbol{s}(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_n \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^{-\omega_n t}$

Sehingga solusi umum Persamaan Vibrasi Teredam Kritis adalah

$\boldsymbol{z}(t) = C_1\boldsymbol{r}(t) + C_2\boldsymbol{s}(t)$

$$\boldsymbol{z}(t) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_n \end{pmatrix} e^{-\omega_n t} + C_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_n \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^{-\omega_n t} \quad (30)$$

dengan C_1 dan C_2 adalah konstanta-konstanta sebarang.

3.1.2 Solusi Sistem Vibrasi teredam ringan (*Underdamped)*

Sama halnya dengan sistem teredam kritis, solusi sistem teredam ringan juga menggunakan persamaan karakteristik yang sama.

Berdasarkan Persamaan karakteristik (19) diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

Karena sistem teredam ringan maka $c^2 < 4km$, maka Persamaan (19) menjadi,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} \quad (31)$$

Persamaan (20) ekuivalen dengan persamaan berikut.

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (32)$$

Jika $\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_{nd}$ (frekuensi alami teredam) maka Persamaan (21) dapat ditulis,

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_{nd} \quad (33)$$

Karena nilai eigen berupa kompleks konjugat maka ambil salah satu nilai eigen untuk mencari vektor eigen yang bersesuaian. Ambil $\lambda_1 = -\zeta\omega_n + i\omega_{nd}$

Vektor eigen dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \quad (34)$$

Persamaan (34) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$\begin{pmatrix} \zeta\omega_n - i\omega_{nd} & 1 \\ -(\omega_n)^2 & -\zeta\omega_n - i\omega_{nd} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Untuk mencari solusi Persamaan (35) dapat menggunakan operasi baris elementer berikut,

$$\left|\begin{matrix} \zeta\omega_n - i\omega_{nd} & 1 & 0 \\ -(\omega_n)^2 & -\zeta\omega_n - i\omega_{nd} & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{b_1 \times \frac{1}{\zeta\omega_n - i\omega_{nd}}}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & \frac{1}{\zeta\omega_n - i\omega_{nd}} & 0 \\ -(\omega_n)^2 & -\zeta\omega_n - i\omega_{nd} & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{b_2 + (\omega_n)^2 b_1}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & \frac{1}{\zeta\omega_n - i\omega_{nd}} & 0 \\ 0 & \frac{-\zeta^2\omega_n^2 - \omega_{nd}^2 + \omega_n^2}{\zeta\omega_n - i\omega_{nd}} & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{b_2 \times \frac{\zeta\omega_n - i\omega_{nd}}{-\zeta^2\omega_n^2 - \omega_{nd}^2 + \omega_n^2}}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & \frac{1}{\zeta\omega_n - i\omega_{nd}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right|$$

Maka diperoleh :

$v_1 + \frac{1}{\zeta\omega_n - i\omega_{nd}} v_2 = 0$

$v_2 = -(\zeta\omega_n - i\omega_{nd})\, v_1$

maka $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n + i\omega_{nd} \end{pmatrix} v_1$

Ambil $v_1 = 1$,

Jurnal Matematika, Komputasi, dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 729 - 738, September - Desember 2024
ISSN : 2503-2984

vektor eigen: $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n + i\omega_{nd} \end{pmatrix}$ (36)

Solusi Sistem persamaan diferensial :

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{v}e^{(\lambda_1 t)}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n + i\omega_{nd} \end{pmatrix} e^{(-\zeta\omega_n + i\omega_{nd})t}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n + i\omega_{nd} \end{pmatrix} e^{-\zeta\omega_n t} e^{i\omega_{nd} t}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n + i\omega_{nd} \end{pmatrix} e^{-\zeta\omega_n t}(\cos(\omega_{nd}t) + i\sin(\omega_{nd}t)$$

$$\boldsymbol{z}(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\begin{pmatrix} \cos(\omega_{nd}t) \\ -\zeta\omega_n\cos(\omega_{nd}t) - \omega_{nd}\sin(\omega_{nd}t) \end{pmatrix} + ie^{-\zeta\omega_n t}\begin{pmatrix} \sin(\omega_{nd}t) \\ \omega_{nd}\cos(\omega_{nd}t) - \zeta\omega_n\sin(\omega_{nd}t) \end{pmatrix} \quad (36)$$

Sehingga solusi persamaan diferensial sistem vibrasi redaman ringan sebagai berikut.

$$r(t) = Re(z) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_{nd}t) \\ -\zeta\omega_n\cos(\omega_{nd}t) - \omega_{nd}\sin(\omega_{nd}t) \end{pmatrix} e^{-\zeta\omega_n t}$$

$$s(t) = im(z) = \begin{pmatrix} \sin(\omega_{nd}t) \\ \omega_{nd}\cos(\omega_{nd}t) - \zeta\omega_n\sin(\omega_{nd}t) \end{pmatrix} e^{-\zeta\omega_n t}$$

Solusi umum Sistem Persamaan Diferensial Sistem Vibrasi Redaman Ringan :

$$z(t) = C_1\begin{pmatrix} \cos(\omega_{nd}t) \\ -\zeta\omega_n\cos(\omega_{nd}t) - \omega_{nd}\sin(\omega_{nd}t) \end{pmatrix} e^{-\zeta\omega_n t} + C_2\begin{pmatrix} \sin(\omega_{nd}t) \\ \omega_{nd}\cos(\omega_{nd}t) - \zeta\omega_n\sin(\omega_{nd}t) \end{pmatrix} e^{-\zeta\omega_n t} \quad (37)$$

dengan C_1 dan C_2 adalah konstanta-konstanta real.

3.1.3 Solusi Sistem Vibrasi Teredam Berlebihan (*overdamping)*

Sistem vibrasi teredam berlebihan memiliki persamaan karakteristik yang sama sehingga Persamaan (19) diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

Karena sistem teredam berlebihan maka $c^2 > 4km$, maka Persamaan (19) menjadi,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} \quad (38)$$

Persamaan (38) ekuivalen dengan persamaan berikut.

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (39)$$

Jika $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \omega_{nd}$ (frekuensi alami teredam) maka Persamaan (39) dapat ditulis,

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_{nd} \quad (40)$$

Karena nilai eigen berupa nilai real berbeda. Misal v vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1 dapat diperoleh,

Untuk $\lambda_1 = -\zeta\omega_n + \omega_{nd}$ (41)

Vektor eigen dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut:

$$(A - \lambda_1 I)v = 0 \quad (42)$$

Persamaan (42) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$\begin{pmatrix} \zeta\omega_n - \omega_{nd} & 1 \\ -(\omega_n)^2 & -\zeta\omega_n - \omega_{nd} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Untuk mencari solusi Persamaan (4.33) dapat menggunakan operasi baris elementer berikut,

$$\left|\begin{matrix} \zeta\omega_n - \omega_{nd} & 1 & 0 \\ -(\omega_n)^2 & -\zeta\omega_n - \omega_{nd} & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{b_1 \times \frac{1}{\zeta\omega_n - \omega_{nd}}}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & \dfrac{1}{\zeta\omega_n - \omega_{nd}} & 0 \\ -(\omega_n)^2 & -\zeta\omega_n - \omega_{nd} & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{b_2 + (\omega_n)^2 b_1}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & \dfrac{1}{\zeta\omega_n - \omega_{nd}} & 0 \\ 0 & \dfrac{-\zeta^2\omega_n^2 - \omega_{nd}^2 + \omega_n^2}{\zeta\omega_n - \omega_{nd}} & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{b_2 \times \frac{\zeta\omega_n - \omega_{nd}}{-\zeta^2\omega_n^2 - \omega_{nd}^2 + \omega_n^2}}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & \dfrac{1}{\zeta\omega_n - \omega_{nd}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right|$$

Maka diperoleh :

$$v_1 + \frac{1}{\zeta\omega_n - \omega_{nd}} v_2 = 0$$

$$v_2 = -(\zeta\omega_n - \omega_{nd})v_1$$

maka $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n + \omega_{nd} \end{pmatrix} v_1$

Ambil $v_1 = 1$,

vektor eigen: $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n + \omega_{nd} \end{pmatrix}$ (44)

Untuk $\lambda_2 = -\zeta\omega_n - \omega_{nd}$ (45)

Misal $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ adalah vektor yang bersesuaian dengan λ_2, maka Persamaan (42) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$\begin{pmatrix} \zeta\omega_n + \omega_{nd} & 1 \\ -(\omega_n)^2 & -\zeta\omega_n + \omega_{nd} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

Untuk mencari solusi Persamaan (46) dapat menggunakan operasi baris elementer berikut,

$$\left|\begin{matrix} \zeta\omega_n + \omega_{nd} & 1 & 0 \\ -(\omega_n)^2 & -\zeta\omega_n + \omega_{nd} & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{b_1 \times \frac{1}{\zeta\omega_n + \omega_{nd}}}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & \dfrac{1}{\zeta\omega_n + \omega_{nd}} & 0 \\ -(\omega_n)^2 & -\zeta\omega_n + \omega_{nd} & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{b_2 + (\omega_n)^2 b_1}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & \frac{1}{\zeta\omega_n + \omega_{nd}} & 0 \\ 0 & \frac{-\zeta^2\omega_n^2 + \omega_{nd}^2 + \omega_n^2}{\zeta\omega_n + \omega_{nd}} & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{b_2 \times \frac{\zeta\omega_n + \omega_{nd}}{-\zeta^2\omega_n^2 + \omega_{nd}^2 + \omega_n^2}}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & \frac{1}{\zeta\omega_n + \omega_{nd}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right|$$

Maka diperoleh :

$$u_1 + \left(\frac{1}{\zeta\omega_n + \omega_{nd}}\right) u_2 = 0$$

$$u_2 = -(\zeta\omega_n + \omega_{nd})\, u_1$$

maka $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n - \omega_{nd} \end{pmatrix} u_2$

Ambil $u_2 = 1$,

vektor eigen: $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n - \omega_{nd} \end{pmatrix}$ (47)

Solusi Sistem persamaan diferensial :

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}e^{(\lambda_1 t)}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n + \omega_{nd} \end{pmatrix} e^{(-\zeta\omega_n + \omega_{nd})t}$$

$$\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{u}e^{(\lambda_1 t)}$$

$$\boldsymbol{s}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n - \omega_{nd} \end{pmatrix} e^{(-\zeta\omega_n - \omega_{nd})t}$$

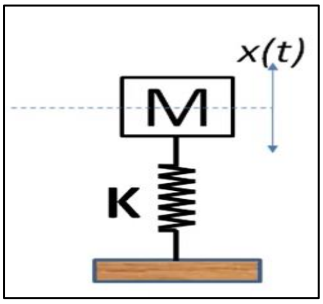
Solusi umum Sistem Persamaan Diferensial Sistem Vibrasi Redaman Berlebihan :

$$\boldsymbol{z}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n + \omega_{nd} \end{pmatrix} e^{(-\boldsymbol{\zeta\omega_n} + \boldsymbol{\omega_{nd}})\boldsymbol{t}} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n - \omega_{nd} \end{pmatrix} e^{(-\boldsymbol{\zeta\omega_n} - \boldsymbol{\omega_{nd}})\boldsymbol{t}} \quad (48)$$

dengan C_1 dan C_2 adalah konstanta-konstanta real.

3.2 Sistem Vibrasi tanpa Redaman

Asumsi yang digunakan pada sistem vibrasi tanpa redaman adalah suatu pengas yang disusun secara vertikal dengan ujung pegas diberikan balok (benda) bermassa m dan terdapat gaya F yang menekan benda kebawah. Sistem ini dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 1 *Sistem Pegas Vertikal tanpa Redaman*

Berdasarkan Persamaan (3) Persamaan Vibrasi Tanpa Redaman adalah

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Solusi Sistem Vibrasi tanpa Redaman

Persamaan (3) adalah persamaan diferensial linear homogen orde dua. Persamaan tersebut dapat diubah menjadi persamaan diferensial linear homogen orde satu dengan menggunakan sistem persamaan diferensial dengan metode matriks.

Langkah awal mencari solusi sistem persamaan diferensial dengan metode matriks yaitu mendefinisikan variabel baru,

$$y = \dot{x} \quad (49)$$

sehingga diperoleh $\ddot{x} = \dot{y}$. Lalu langkah selanjutnya subtitusi $\ddot{x} = \dot{y}$ pada Persamaan (3) maka diperoleh,

$$\dot{y} = -\frac{k}{m}x \quad (50)$$

Dari Persamaan (49) dan (50),maka diperoleh sistem Sistem persamaan diferensial sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{k}{m}x \end{aligned} \quad (51)$$

Misalkan $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$, maka Persamaan (51) dapat ditulis kedalam bentuk matriks berikut.

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \quad (52)$$

Dengan $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}$, maka persamaan karakteristiknya adalah :

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad (53)$$

Berdasarkan Persamaan karakteristiknya diperoleh nilai eigen :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\sqrt{\frac{k}{m}} = i\omega_n \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{\frac{k}{m}} = -i\omega_n \end{aligned} \quad (54)$$

Karena nilai eigen yang diperoleh adalah bilangan kompleks maka untuk menentukan vektor eigen yang bersesuaian, cukup memilih salah satu nilai eigen yang diperoleh.

Misal vektor eigen yang dicari $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dan Ambil nilai eigen $\lambda_1 = i\omega_n$, maka vektor eigen dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$\begin{pmatrix} -i\omega_n & 1 \\ -\omega_n^2 & -i\omega_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

Untuk mencari solusi Persamaan (55) dapat menggunakan operasi baris elementer berikut,

$$\left|\begin{matrix} -i\omega_n & 1 & 0 \\ -\omega_n^2 & -i\omega_n & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{b_1 \times \frac{-1}{-i\omega_n}} \left|\begin{matrix} 1 & \frac{1}{-i\omega_n} & 0 \\ -\omega_n^2 & -i\omega_n & 0 \end{matrix}\right|$$

$$\xrightarrow{b_2+(-\omega_n^2)b_1} \left|\begin{matrix} 1 & \frac{1}{-i\omega_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$$

Maka diperoleh :

$$v_1 + \frac{1}{-i\omega_n} v_2 = 0$$

$$v_2 = i\omega_n v_1$$

Maka $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_n \end{pmatrix} v_2$

Ambil $v_2 = 1$,

vektor eigen: $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_n \end{pmatrix}$ (56)

Solusi Sistem persamaan diferensial :

$$\boldsymbol{z}(t) = ve^{(\lambda_1 t)}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_n \end{pmatrix} e^{(i\omega_n)t}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_n \end{pmatrix} (\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t)$$

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_n t \\ -\omega_n \sin \omega_n t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin \omega_n t \\ \omega_n \cos \omega_n t \end{pmatrix} \quad (57)$$

Sehingga solusi persamaan diferensial sistem vibrasi tanpa redaman dengan mengambil sebagai berikut.

$$\boldsymbol{u}(t) = Re(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \cos \omega_n t \\ -\omega_n \sin \omega_n t \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}(t) = im(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \sin \omega_n t \\ \omega_n \cos \omega_n t \end{pmatrix}$$

Solusi umum sistem persamaan diferensial sistem vibrasi tanpa redaman :

$$\boldsymbol{z}(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos \omega_n t \\ -\omega_n \sin \omega_n t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin \omega_n t \\ \omega_n \cos \omega_n t \end{pmatrix} \quad (58)$$

Dengan C_1 dan C_2 adalah konstanta-konstanta real.

3.3 Analisis Kestabilan disekitar Titik Ekuilibrium

Langka awal yang dilakukan untuk melihat kestabilan model adalah mencari titik ekuilibrium dari model. Selanjutnya, menentukan nilai eigennya. Lalu, langkah terakhir melihat stabil atau tidaknya model tersebut di sekitar titik ekuilibrium dengan menggunakan nilai eigen yang telah diperoleh.

Model sistem persamaan diferensial vibrasi dengan redaman (15) adalah

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y$$

Model sistem Persamaan diferensial vibrasi tanpa redaman (51) adalah

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\frac{k}{m}x$$

Sistem Teredam Kritis (*Critical Damping)*

Titik ekuilibrium dari sistem Persamaan (5) dapat diperoleh dengan menggunakan definisi titik ekuilibrium sehingga persamaan tersebut menjadi,

$$\begin{gathered} y = 0 \\ -\frac{k}{m}x = 0 \end{gathered} \quad (59)$$

Berdasarkan Persamaan (4.47) maka diperoleh titik ekuilibrium sisitem persamaan vibrasi dengan redaman kritis adalah

$$(x, y) = (0,0) \quad (60)$$

Analisis kestabilan sistem disekitar titik ekuilibrium $(x, y) = (0,0)$, dapat kita perhatikan nilai eigen sistem vibrasi teredam kritis pada Persamaan (21) yaitu :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m} = -\omega_n$$

yang memiliki nilai eigen real negatif sehingga semua phase portrait bergerak mendekati titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium pada kasus ini disebut *stable node point*. Jadi, Model sistem teredam kritis stabil disekitar titik ekuilibrium.

Sistem Teredam Ringan (*Underdamped*)

Dengan cara yang sama pada sistem teredam kritis maka titik ekuilibrium sistem teredam ringan adalah

$$(x, y) = (0,0)$$

Analisis kestabilan sistem disekitar titik ekuilibrium $(x, y) = (0,0)$, dapat kita perhatikan nilai eigen pada Persamaan (33) yaitu

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

yang memiliki nilai eigen kompleks konjugat sehingga trayektorinya berbentuk spiral dan phase portraitnya mengelilingi titik ekuilibrium. Perhatikan nilai $-\zeta\omega_n < 0$ maka phase portraitnya menuju titik ekuilibrium dan disebut *stable spiral point*.

Sistem Teredam Berlebihan (*Overdamping)*

Dengan cara yang sama pada sistem teredam kritis maka titik ekuilibrium sistem teredam berlebihan adalah

$$(x, y) = (0,0)$$

Analisis kestabilan sistem disekitar titik ekuilibrium $(x, y) = (0,0)$, dapat kita perhatikan nilai eigen pada Persamaan (40) yaitu :

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_{nd}$$

yang memiliki nilai eigen real dan berbeda tanda sehingga phase portrait bergerak menuju ke titik ekuilibrium sepanjang salah satu sumbu dan menjauhi titik ekuilibrium ke tak hingga sepanjang sumbu lainnya. Titik ekuilibrium pada kasus ini disebut *saddle point* atau tidak stabil.

Sistem Vibrasi Tanpa Redaman

Titik ekuilibrium dari sistem Persamaan (51) dapat diperoleh dengan menggunakan definisi ekuilibrium sehingga persamaan tersebut menjadi,

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ -\frac{k}{m}x &= 0 \end{aligned} \tag{61}$$

Berdasarkan Persamaan (4.51) maka diperoleh titik ekuilibrium sisitem persamaan vibrasi tanpa redaman adalah

$$(x, y) = (0,0) \tag{62}$$

untuk menganalisis kestabilan sistem disekitar titik ekuilibrium $(x, y) = (0,0)$, dapat kita perhatikan nilai eigen pada Persamaan (4.9) yaitu

$$\lambda_1 = i\omega_n$$
$$\lambda_2 = -i\omega_n$$

yang memiliki nilai eigen imajiner murni sehingga semua phase portraitnya mengelilingi dan menutupi titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium pada kasus ini disebut *center point* dan model persamaan merupakan osilator stabil secara alami.

4. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bagian 3, maka dapat ditarik kesimpulan Adapun kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Solusi umum sistem vibrasi dengan redaman kritis (*criticaldamping*) adalah :
$$\boldsymbol{z}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_n \end{pmatrix} e^{-\omega_n t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_n \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{-\omega_n t}$$
dengan C_1, C_2 adalah kontanta-konstanta real sebarang.
2. Solusi umum sistem vibrasi dengan redaman ringan *(underdamped)* adalah :
$$z(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega_{nd}t) \\ -\zeta\omega_n \cos(\omega_{nd}t) - \omega_{nd}\sin(\omega_{nd}t) \end{pmatrix} e^{-\zeta\omega_n t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(\omega_{nd}t) \\ \omega_{nd}\cos(\omega_{nd}t) - \zeta\omega_n \sin(\omega_{nd}t) \end{pmatrix} e^{-\zeta\omega_n t}$$
dengan C_1, C_2 adalah kontanta-konstanta real sebarang.
3. Solusi umum sistem vibrasi dengan redaman berlebihan (*overdamping*) adalah:
$$\boldsymbol{z}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n + \omega_{nd} \end{pmatrix} e^{(-\zeta\omega_n + \omega_{nd})t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n - \omega_{nd} \end{pmatrix} e^{(-\zeta\omega_n - \omega_{nd})t}$$
dengan C_1, C_2 adalah kontanta-konstanta real sebarang.
4. Solusi umum sistem vibrasi tanpa redaman adalah :
$$z(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos\omega_n t \\ -\omega_n \sin\omega_n t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin\omega_n t \\ \omega_n \cos\omega_n t \end{pmatrix}$$
dengan C_1, C_2 adalah kontanta-konstanta real sebarang.
5. Analisis kestabilan disekitar titik ekuilibrium pada sistem vibrasi diperoleh bahwa :
   a. Sistem vibrasi dengan redaman kritis (*critical damping)* memiliki nilai eigen $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m} = -\omega_n$, merupakan nilai eigen real negatif sehingga semua phase portrait bergerak mendekati titik ekuilibrium (*stable node point).* Jadi, Model sistem teredam kritis stabil disekitar titik ekuilibrium.
   b. Sistem vibrasi dengan redaman ringan (*underdamped)* memiliki nilai eigen $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, merupakan nilai eigen kompleks konjugat sehingga semua phase portrait bergerak mengelilingi titik ekuilibrium (*stable spiral point.)* dan $-\zeta\omega_n < 0$ maka phase potrait menuju titik ekuilibrium. Jadi, Model sistem teredam ringan stabil disekitar titik ekuilibrium.
   c. Sistem vibrasi dengan redaman berlebihan (*overdamping)* memiliki nilai eigen $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_{nd}$, merupakan nilai eigen real dan berbeda tanda sehingga phase potrait ada yang menuju dan menjauhi titik ekuilibrium. Jadi, model sistem teredam berlebihan tidak stabil disekitar titik ekuilibrium.

d. Sistem vibrasi tanpa redaman memiliki nilai eigen $\lambda_1 = i\omega_n$ dan $\lambda_2 = -i\omega_n$, merupakan nilai eigen imaginer murni sehingga phase potrait mengelilingi dan menutupi titik ekuilibrium. Jadi, model sistem tanpa redaman stabil secara alami.

Adapun saran yang penulis berikan untuk peneliti selanjutnya yaitu membuat model sistem vibrasi lebih kompleks contohnya dengan menambah beban massa ataupun memasukan gaya luar pada sistem serta parameter-parameter lainnya dengan menggunakan Sistem persamaan diferensial.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada pembimbing dan dan para penguji yang memberikan saran, kritikan dan ide sehingga penelitian dapat terselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] F. Aryani dan M. Solihin (2017). Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, *3*(2), 16–23. http://ejournal.uin-suska.ac.id/index.php/JSMS/article/download/4473/2759

[2] W. E. Boyce dan R. C. DiPrima (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Textbook and Student Solutions Manual Set*. 796. http://books.google.com/books?id=q3lmPgAACAAJ&dq=elementary+differential+equations+and+boundary+value+problems&hl=&cd=16&source=gbs_api%5Cnpapers3://publication/uuid/9096B1C5-0F87-4FEA-AA72-C3E07E930C19

[3] N. A. Hadi, E. Djauhari, A. K. Supriatna dan M. Johansyah (2019). Teknik Penentuan Solusi Sistem Persamaan Diferensial Linear Non-Homogen Orde Satu. *Matematika*, *18*(1), 29–40. https://doi.org/10.29313/jmtm.v18i1.5079

[4] J. Dewanto. (1999). Kajian Teoritik Sistem Peredam Getaran Satu Derajat Kebebasan. *Jurnal Teknik Mesin*, *1*(2), 156–162. http://puslit2.petra.ac.id/ejournal/index.php/mes/article/view/15909

[5] I. Juliah (2015). Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Model Matematika Proses Transmisi Virus Dengue Di Dalam Tubuh Manusia Dengan Terapi Obat Herbal. *Unnes Journal of Mathematics*, *5*(2), 127–134.

[6] E. Kurniawati (2020). *MATH unesa*. *8*(2).

[7] Y. Ramdani (2006). Kajian pemahaman matematika melalui etika pemodelan matematika. *Jurnal Sosial dan Pembangunan*, *22*(1), 2.

[8] A. A. P. Rusianto dan T. Susastriawan (2021). *Getaran Mekanis*. AKPRIND PRESS.

[9] D. L. Saraswati (2016). Penggunaan Logger Pro Untuk Analisis Gerak. *Faktor Exacta*, *9*(2), 119–124.

[10] M. D. Siagian (2016). Kemampuan koneksi matematik dalam pembelajaran matematika. *MES: Journal of Matematics Education and Science2*, *2*(1), 58–67.

[11] B. Simanullang dan C. I. S. Budhayanti (2003). Pemodelan Matematika. *Pemecahan Masalah Matematika*, *Pertemuan 2*, 1–29. http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/PRODI._ILMU_KOMPUTER/196603252001121-MUNIR/Multimedia/Multimedia_Bahan_Ajar_PJJ/Pem_Mslh_Mat/unit8_konsep_dasar_pemodelan_matematika.pdf

Diterima tgl. 20 September 2024
Direvisi tgl. 6 Desember 2024
Disetujui untuk terbit tgl. 15 Desember 2024