Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 770 - 778, September - Desember 2024
ISSN: 2503 – 2984

ALGORITMA UNTUK MENYELESAIKAN MODEL LOTKA-VOLTERRA TIGA SPESIES MENGGUNAKAN METODE RUNGE-KUTTA FEHLBERG

Wa Ode Ade Krisiana[1)]
[1)]Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: krisiana.ode@gmail.com

Asrul Sani[1,a)] dan **Muh. Kabil Djafar**[1,b)]
[1)]Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: [a)]saniasrul1969@gmail.com, dan [b)]kabildjafar@gmail.com

ABSTRAK

Sistem persamaan diferensial Lotka-Volterra tiga spesies tidak bisa di selesaikan secara eksplisit atau analitik, artinya tidak mempunyai solusi eksak, sehingga penyelesaian secara numerik dapat digunakan untuk memperoleh sulusi persamaan diferensial non linear tersebut. Dalam penelitian ini akan dijelaskan tentang bagaiman mencari solusi numerik model Lotka-Volterra dengan menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF). Metode ini dipandang cukup baik digunakan dalam mencari solusi numerik karena memiliki ketelitian yang tinggi. Penelitian Ini dilakukan dengan menghitung nilai k_1 sampai k_6 , l_1 sampai l_6 dan m_1 sampai m_6 dengan menggunakan formulasi rumus yang telah ditentukan, kemudian menghitung solusi x_{i+1} , y_{i+1}, z_{i+1}, u_{i+1} , v_{i+1} dan w_{i+1} dengan mensubtitusikan variabel-variabel yang telah didapatkan ke dalam formulasi rumus metode RKF. Setelah itu menganalisi hasil penyelsaian numerik. Hasil dari penyelesaian numerik pada saat t = 15 dan h = 0.05 dengan metode RKF orde-4 diperoleh solusi x, y dan z berturut-turut yaitu 612.4778414559795, 1715×10^{-13}, 2.8497040826749, dan solusi$u$, v , w pada metode RKF orde-5 berturut-turut yaitu 612.3976830426056, 172×10^{-12}, 2.8501931780485. Sehingga galat relatif yang diperoleh yaitu < 0.0001. Maka dapat disimpulkan bahwa metode RKF merupakan metode numerik yang efisien dan memiliki ketelitian tinggi dan dapat diterapkan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial Lotka-Volterra tiga spesies.

Kata Kunci: Lotka-Volterra, Runge-Kutta Fehlberg, Sistem persamaan diferensial, Galat, Ekosistem.

ABSTRACT

Lotka-Volterra's three-species system of differential equations cannot be solved explicitly or analytically, meaning that it does not have an exact solution, so the numerical solution iserik can be used to obtain the solution of the non-linear differential equation. In this study, it will be explained how to find a numerical solution for the Lotka-Volterra model using the Runge-Kutta Fehlberg method (RKF). This method is considered good enough to be used in finding numerical solutions because it has high accuracy. This research was conducted by calculating the value of k_1*until*k_6, l_1*until* l_6 *and* m_1*until*m_6*by using the predetermined formula formulation, then calculating the solution* x_{i+1}, *dan* y_{i+1}, z_{i+1}, u_{i+1}, *dan* v_{i+1} *and* w_{i+1} *by substituting the variables that have been obtained into the formulation of the formula for the RKF method. After that, analyzing the results of numerical solutions. The result of the numerical solution at time* $t = 15$ *and* $h = 0.005$ *with the fourth-order RKF method, the solution x, y and z in a row that is* 612.4778414559795, 1715×10^{-13}, 2.8497040826749, *and solutions* u, v, *and* w *on the 5th order RKF method in a row, namely* 612.3976830426056, 172×10^{-12}, 2.8501931780485. *So the relative error obtained is < 0.0001. It can be concluded that the RKF method is a numerical method that is efficient and has high accuracy and can be applied to solve the Lotka-Volterra system of three species differential equations.*

Keywords: Lotka-Volterra, Runge-Kutta Fehlberg, System of differential equations, Error, Ecosystem.

1. Pendahuluan

Model matematika merupakan bagian dari matematika terapan yang digunakan untuk menjelaskan fenomena alam yang terjadi, serta dapat digunakan untuk memprediksi perilaku sistem untuk jangka waktu tertentu. Pemodelan matematika pada bidang ekologi sangat menarik untuk di kaji mengingat banyak sekali faktor-faktor yang mempengaruhi pertumbuhan dan kehidupan populasi makhluk hidup serta keseimbangan makhluk hidup. Proses dinamika kehidupan makhluk hidup (organisme) dapat di modelkan secara matematis dengan menggunakan persamaan diferensial yang melibatkan waktu yang kontinu atau waktu yang diskret [9].

Persamaan diferensial merupakan salah satu ilmu matematika yang digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam ilmu pengetahuan seperti bidang fisika, biologi, ekonomi, matematika dan lain sebagainya. Masalah tersebut dapat dibentuk ke dalam model matematis dengan asumsi-asumsi tertentu. Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Gabungan dari beberapa pesamaan diferensial disebut sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial nonlinear.

Salah satu model sistem persamaan diferensial non linear yang digunakan dalam bidang biologi khususnya ilmu ekologi dalam menjelaskan fenomena alam adalah model mangsa-pemangsa. Model ini menggambarkan interaksi antara dua makhluk hidup yang berhubungan dalam bentuk predasi. Model mangsa-pemangsa pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model ini juga di sebut model Lotka-Volterra [3]. Pada kenyataannya, interaksi antara pemangsa dan mangsa tidak hanya terjadi pada dua spesies saja. Misalnya interaksi antara tiga spesies yang terdiri dari prey, predator tingkat satu dan predator tingkat dua. Prey adalah spesies yang dimangsa predator tingkat satu, predator tingkat satu adalah spesies yang dimangsa predator tingkat dua, dan predator tingkat dua adalah spesies yang memangsa predator tingkat satu.

Sistem persamaan diferensial Lotka-Volterra tiga spesies tidak bisa di selesaikan secara eksplisit atau analitik, artinya tidak mempunyai solusi eksak, sehingga penyelesaian secara numerik dapat digunakan untuk memperoleh solusi persamaan diferensial non linear tersebut. Solusi yang diperoleh dari metode numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan dari solusi analitiknya, sehingga solusi numerik tersebut memuat nilai kesalahan [1]. Oleh karena itu didalam penelitian ini akan dijelaskan sebuah metode untuk mencari solusi dari model Lotka-Volterra tiga spesies secara numerik.

Metode penyelesaian persamaan diferensial biasa secara numerik terbagi menjadi dua, yaitu metode satu langkah dan metode banyak langkah. Metode yang termasuk satu langkah adalah metode deret Taylor, metode Euler, metode Runge-Kutta dan metode Heun. Sedangkan metode yang termasuk banyak langkah adalah metode Adams Bashforth Moulton (ABM), metode Milne Simpson dan metode Hamming [15].

Dalam penelitian ini akan dijelaskan tentang bagaimana mencari solusi numerik model Lotka-Volterra dengan menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF). Metode ini dipandang cukup baik digunakan dalam mencari solusi numerik karena memiliki ketelitian yang tinggi.

Metode Runge-Kutta Fehlberg termasuk dalam keluarga metode Runge-Kutta Orde-4, namun memiliki ketelitian sampai orde-5, sehingga disebut RKF 45. Ketelitian yang tinggi ini dimungkinkan karena metode RKF memiliki 6 konstanta perhitungan yang berperan untuk memperbarui solusi sampai orde-5.

Ada beberapa penelitian terdahulu yang mirip dengan penelitian yang saya lakukan yaitu seperti pada skripsi Siti Nur Urifah yang berjudul "Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Lotka-Volterra Dengan Metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF) dan Metode Heun. Muhlish yang berjudul "Penyelesaian numerik Model Imunologi Seluler pada Tuberkulosis Dengan Metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF) dan Metode Adams Bashforth Moulton". Jurnal Randhi Nanang Darmawan yang berjudul "Simulasi Solusi Numerik Model Lotka-Volterra dengan Metode Runge-Kutta Fehlberg (Studi Kasus populasi musang luwak dan ayam hutan merah di Taman Nasional Alas Purwo)". Skripsi Nuruddin Syau Qi "Penyelesaian Numerik Model Predator-Prey Tiga Spesies Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde 4".

Penelitian ini diharapkan dapat memperoleh solusi numerik dari model Lotka-Volterrra tiga spesies yang lebih akurat. Dan juga penelitian ini sebagai cara untuk menutupi keterbatasan manusia dalam hal menghitung. Oleh karena itu penulis tertarik melakukan penelitian ini dengan judul "Algoritma untuk Menyelesaikan Model Lotka-Volterra Tiga Spesies Menggunakan Metode Runge-Kutta Fehlberg".

Pada bagian kedua dijelaskan tetang metode penelitian untuk menyelesiakan sistem persamaan Lotka-Volterra tiga spesies dengan metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF). Selanjutnya pada bagian ketiga dibahas hasil penelitian terkait analisis galat, analisis hasil numerik dan simulasi program. Pada bagian keempat membahas kesimpulan dan saran berdasarkan hasil yang diperoleh pada bagian ketiga.

2. Metode

Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 770 - 778, September - Desember 2024
ISSN: 2503 – 2984

Penelitian menggunakan metode kuantitatif dengan di dahului oleh studi literatur. Penelitian ini pun bersifat aplikatif terhadap rumus yang ada.

2.1. Sumber Data

Sumber data yang digunakan penulis dalam penelitian ini adalah data sekunder. Data sekunder merupakan merupakan sumber data yang tidak langsung memberikan data kepada pengumpul data, misalnya melalui orang lain atau lewat dokumen. Untuk memperoleh data tersebut penulis mengambil beberapa buku, brosur, website dan contoh penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan penelitian ini.

2.2. Metode Pengumpulan Data

Metode pengumpulan data dilakukan guna memperoleh informasi yang dibutuhkan dalam rangka mencapai tujuan penelitian. Dalam penelitian ini penulis menggunakan dokumen seperti studi literatur sebagai metode pengumpulan data. Studi literatur adalah metode pengumpulan data yang tidak ditujukan langsung kepada subjek penelitian. Studi literatur adalah jenis pengumpulan data yang meneliti barbagai macam dokumen yang berguna untuk bahan analisis. Adapun dokumen yang digunakan adalah dokumen sekunder yang dituliskan berdasarkan penelitian yang sudah ada.

2.3. Formulasi Model

Model yang digunakan pada penelitian ini adalah model mangsa pemangsa tiga spesies yang dikembangkan oleh Erica Chauvet dkk yang diformulasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy - eyz, \qquad (1) \\ \frac{dz}{dt} &= -pz + qyz, \end{aligned}$$

dimana:

a = Laju pertumbuhan alami Mangsa tanpa adanya pemangsa.
b = Laju penurunan Mangsa akibat predasi.
c = Tingkat kematian alami Pemangsa I tanpa adanya mangsa.
d = Laju pertambahan Pemangsa I akibat predasi.
e = Laju penurunan Pemangsa I akibat predasi.
p = Tingkat kematian alami Pemangsa II tanpa adanya mangsa.
q = Laju pertambahan Pemangsa II akibat predasi.

2.4. Menyelesaiakan Sistem Persamaan Lotka-Volterra Tiga Spesies dengan Metode Runge-Kutta Fehlbergh (RKF)

Secara umum, algoritma atau langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial secara numerik dengan metode RKF adalah:

1. Menentukan nilai awal pada sistem persamaan diferensial yaitu variabel $x(0), y(0)$ dan $z(0)$ dan nilai parameter yang terdapat dalam sistem persamaan diferensial (1),
2. Menentukan nilai t (waktu) yang akan ditentukan penyelesaiannya beserta besarnya h (ukuran langkah),
3. Menuliskan formulasi sistem persamaan Lotka-Volterra tiga spesies,
4. Menghitung nilai k_1 sampai k_6 , l_1 sampai l_6 dan m_1 sampai m_6 dengan menggunakan formulasi rumus yang telah ditentukan,

   Menghitung solusi x_{i+1} , y_{i+1}, z_{i+1}, u_{i+1} , v_{i+1} dan w_{i+1} dengan mensubtitusikan variabel-variabel yang telah didapatkan pada langkah 4 ke dalam formulasi rumus metode RKF.

2.5. Menganalisis Numerik Metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF) Model Lotka-Volterra Tiga Spesies

Ada beberapa yang perlu dianalisis dalam penelitian ini yaitu:

1. Menganalisis galat metode RKF
2. Menganalisis hasil numerik dan simulasi program metode RKF pada MATLAB.

2.6. Menarik Kesimpulan

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Lotka-Volterra Tiga Spesies

Model mangsa-pemangsa yang dibahas adalah tiga spesies, dimana x merupakan mangsa paling bawah, spesies y pada level kedua. Selanjutnya spesies y dimangsa oleh spesies z pada level paling atas. Model Lotka-Volterra tiga spesies telah dikembangkan dengan memperhatikan berbagai faktor lain dari populasi dan lingkungan. Asumsi yang digunakan yaitu

1. Model yang digunakan adalah model interakasi tiga spesies yang terdiri dari spesies mangsa, pemangsa pertama, dan pemangsa kedua,

Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 770 - 778, September - Desember 2024
ISSN: 2503 – 2984

2. Siklus rantai makanan terjadi secara seimbang antar spesies,
3. Interaksi antara mangsa dan pemangsa berlangsung secara alami,
4. Laju kelahiran dan kehidupan mangsa pada ketersediaan makanan, yaitu mangsanya.

Dari keempat asumsi model Lotka-Volterra tiga spesies diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy - eyz, \qquad (1) \\ \frac{dz}{dt} &= -pz + qyz, \end{aligned}$$

dimana $x(t)$ adalah jumlah populasi Mangsa pada waktu $t, y(t)$ adalah jumlah populasi Pemangsa I pada waktu $t, z(t)$ adalah jumlah populasi Pemangsa II pada waktu t, a adalah laju pertumbuhan alami Mangsa tanpa adanya pemangsa, b adalah laju penurunan Mangsa akibat predasi, c adalah tingkat kematian alami Pemangsa I tanpa adanya mangsa, d adalah laju pertambahan Pemangsa I akibat predasi, e adalah laju penurunan Pemangsa I akibat predasi, p adalah tingkat kematian alami Pemangsa II tanpa adanya mangsa, dan q adalah laju pertambahan Pemangsa II akibat predasi [8].

3.2 Analisis Galat

Hasil penyelesaian numerik model Lotka-Volterra tiga spesies dengan metode RKF dapat dilihat pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2 berikut ini.

Tabel 3.1 Solusi $x(t), y(t)$ dan $z(t)$ dengan Metode RKF Orde-4

i	t	Variabel		
		x	y	z
0	0.05	69.3877317567305	29.3417572082802	33.8058090947622
1	0.1	68.9695181286933	24.1360584965611	37.279686713216
50	2.5	93.9002349387472	0.0003271128777	34.7098905673776
100	5	136.5835698519269	0.0000001857502	21.0453369047452
150	7.5	198.6692449123511	0.0000000021273	12.7601360448044
200	10	288,976697205177	0,000000000185	7,736681597686
250	12.5	420.3344688086453	0.0000000000754	4.6908780538620
300	15	611,4024673183166	0,0000000001242	2,8441569732802

Tabel 3.2 Solusi $x(t), y(t)$ dan $z(t)$ dengan Metode RKF Orde-5

i	t	Variabel		
		x	y	z
0	0.05	69.3892544921398	29.3545622205405	33.7963737534568
1	0.1	68.971993959787	24.1593617738501	37.2625350955766
50	2.5	93.8962566202843	0.0003355326576	34.7117883497373
100	5	136.577972738616	0.000000192209	21.046338296977
150	7.5	198.6613840696177	0.0000000022077	12.7606502595246
200	10	288.965671144011	0.000000000192	7.736937018441
250	12.5	420.3190242132265	0.0000000000784	4.6909987502606
300	15	611.38086547178	0.000000000129	2.844209436163

Berdasarkan hasil perhitungan dengan kedua metode di atas besarnya ketelitian eksak tidak dapat diukur, hal ini disebabkan model Lotka-Volterra tiga spresies berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear yang tidak dapat diselesaikan secara analitik atau tidak mempunyai solusi eksak. Oleh karena itu, tidak dapat dihasilkan galat sejatinya.

Dalam penyelesaian numerik ini galat yang digunakan adalah galat pemotongan. Galat pemotongan metode RKF merupakan selisih x, y dan z pada orde-4 dan orde-5, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut

$\varepsilon_x = |u_{i+1} - x_{i+1}|$, $\varepsilon_y = |v_{i+1} - y_{i+1}|$, dan $\varepsilon_z = |w_{i+1} - z_{i+1}|$

Pada iterasi pertama saat $i = 0$ atau $t = 0.05$, maka dapat dihitung galat pemotongan metode RKF sebagai berikut

$$\varepsilon_x = |u_{i+1} - x_{i+1}| = |69.38925449214 - 69.38773175673| = 0.0015227354$$

$$\varepsilon_y = |v_{i+1} - y_{i+1}| = |29.35456222054 - 29{,}341757208280| = 0.01280501226$$

$$\varepsilon_z = |w_{i+1} - z_{i+1}| = |33.79637375457 - 33.805757814| = 0.009435340192$$

untuk iterasi selanjutnya perhitungan galat dilakukan dengan bantuan program Matlab. Solusi numerik model Lotka-Volterra tiga spesies dan hasil perhitungan galat pemotongan pada metode RKF dapat dilihat pada Tabel 3.3 sebagai berikut:

Tabel 3.3 Solusi Numerik dan Galat Metode RKF pada Persamaan (1)

i	t	**Variabel**	**Solusi RKF**		**E**	**Galat Pemotongan**
			Orde-4	**Orde-5**		
0	0.05	x	69.38773175673	69.3892544921398	ε_x	0.00152273540931
		y	29.341757208280	29.3545622205405	ε_y	0.012805012260259
		z	33.805809094762	33.79637375457	ε_z	0.009435341305405
1	0.1	x	68.9695181286933	68.971993959787	ε_x	0.001387756266723
		y	24.1360584965611	24.1593617738501	ε_y	0.011631683934766
		z	37.279686713216	37.2625350955766	ε_z	0.008563234711275
50	2.5	x	93.9002349387472	93.8962566202843	ε_x	0.0000026755610
		y	0.0003271128777	0.0003355326576	ε_y	0.000000098311894
		z	34.7098905673776	34.7117883497373	ε_z	0.000005126378895
1000	5	x	136.583569851927	136.577972738616	ε_x	0.000003857144435
		y	0.00000018575	0.000000192209	ε_y	0.000000000019264
		z	21.045336904745	21.046338296977	ε_z	0.000003065904135
150	7.5	x	198.6692449123351	198.661384069617	ε_x	0.000005610439615
		y	0.0000000021273	0.0000000022077	ε_y	0.000000000000072
		z	12.7601360448044	12.7606502595246	ε_z	0.000001858900633
200	10	x	288.976697205177	288.965671144011	ε_x	0.000008160731056
		y	0.000000000185	0.000000000192	ε_y	0.000000000000002
		z	7.736681597686	7.736937018441	ε_z	0.000001127082180
250	12.5	x	420.3344688086453	420.3190242132265	ε_x	0.000011870287778
		y	0.0000000000754	0.000000000129	ε_y	0
		z	4.6908780538620	2.844209436163	ε_z	0.000000683368572
300	15	x	611.402467318317	611.38086547178	ε_x	0.000017266067175
		y	0.000000000124	0.000000000129	ε_y	0.000000000000001
		z	2.84415697328	2.844209436163	ε_z	0.000000414337671

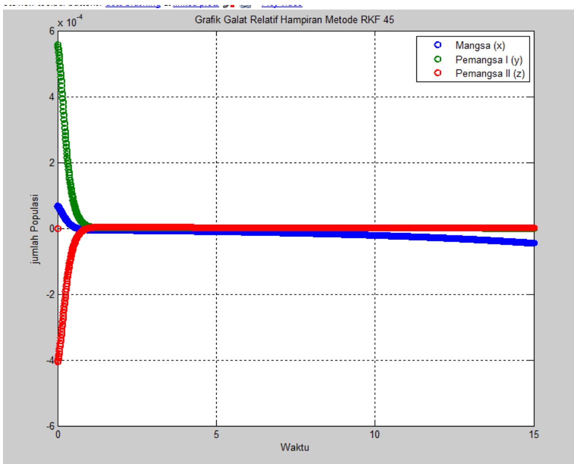
Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 770 - 778, September - Desember 2024
ISSN: 2503 – 2984

Berdasarkan hasil perhitungan galat pemotongan metode RKF pada Tabel 3.3 diatas menunjukkan bahwa galat terkecil pada ε_x adalah 0.000002613463849 yang terletak di titik 2.15 dan

galat terbesar terletak pada titik 15 yaitu sebesar 0.000017266067175. Sedangkan galat terkecil pada ε_y adalah 0 yaitu di titik 10.9 sampai 14.75 dan galat terbesarnya terletak pada titik 0.05 sebesar 0.012805012260259. Dan galat terkecil untuk ε_z adalah 0.000000414337671 yang terletak pada titik 15 sedangkan galat terbesarnya ada pada titik 0.05 sebesar 0.009435341305405.

Untuk mengetahui seberapa bagus metode numerik dapat menyelesaikan suatu persoalan dalam hal ini model Lotka-Volterra tiga spesies maka kita perlu melihat error nya. Pada penjelasan diatas diketahui bahwa galat pemotongan ε_x, ε_y, dan ε_z pada titik $t = 15$ berturut-turut adalah $0 < 0.000017266067175 < 1$, $0 < 1 \times 10^{-15} < 1$ dan $0 < 0.000000414337671 < 1$ sehingga dapat dikatakan bahwa solusi yang diperoleh dengan metode RKF mendekati solusi eksak. Ini membuktikan bahwa solusi dari metode RKF cukup akurat dalam penyelesaian model Lotka-Volterra tiga spesies.

Berikut grafik galat relatif hampiran atau galat pemotongan dari meode RKF 45



Gambar 3.1 Grafik Galat Pemotongan hampiran Metode RKF.

3.3 Analsis Hasil Numerik dan Simulasi Program

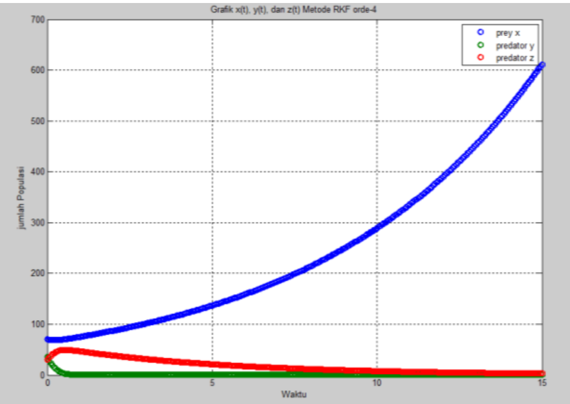
Berdasarkan penelitian ini, nilai parameter dan nilai awal yang digunakan untuk memperoleh solusi numerik model Lotka-Volterra tiga spesies dengan menggunakan penelitian yang dilakukan oleh Rachmawati [18] seperti pada Tabel 3.4 berikut,

Tabel 3. 4 Nilai Awal dan Nilai Parameter Persamaan (1)

Variabel/ Parameter	Deskripsi	Nilai Parameter
$x(0)$	Jumlah populasi Mangsa pada waktu t=0	70
$y(0)$	Jumlah populasi Pemangsa I pada waktu t=0	35
$z(0)$	Jumlah populasi Pemangsa II pada waktu t=0	30
a	Laju pertumbuhan alami Mangsa tanpa adanya pemangsa	0,15
b	Laju penurunan Mangsa akibat predasi	0,01
c	Tingkat kematian alami Pemangsa I tanpa adanya mangsa	0,45
d	Laju pertambahan Pemangsa I akibat predasi	0,002
e	Laju penurunan Pemangsa I akibat predasi	0,1
p	Tingkat kematian alami Pemangsa II tanpa adanya mangsa	0,2
q	Laju pertambahan Pemangsa II akibat predasi	0,08

dimana penelitian tersebut dilakukan terhadap empat spesies yang terdiri dari *prey* rentan (*S*), *prey* terinfeksi (*I*), *intermediet* (*v*) dan *top predator* (*W*). Namun peneliti hanya mengambil data yang diperlukan saja dalam penelitian tersebut yang berhungan dengan penelitian ini, yaitu *prey* rentan sebagai Mangsa (*x*), *intermediet* (*v*) sebagai Pemangsa I (*y*) dan *top predator* (*W*) sebagai Pemangsa II (*z*).

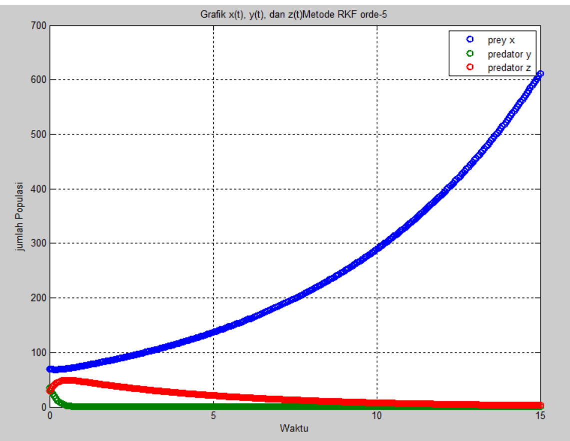
Dengan menggunakan metode RKF orde-4 maka diperoleh grafik $x(t), y(t)$, dan $z(t)$ pada saat $t = 15$ dengan nilai parameter pada Tabel 3.4 sebagai berikut



Gambar 3.2 Grafik $\boldsymbol{x(t), y(t)}$, dan $\boldsymbol{z(t)}$ pada saat $\boldsymbol{t = 15}$ Metode RKF Orde-4.

Gambar 3.2 menunjukkan populasi $x(t), y(t)$, dan $z(t)$ yang dimulai pada saat $t = 0$ dengan nilai parameter yang telah disajikan pada Tabel 3.4. Dengan nilai awal $x(0) = 70, y(0) = 35$, dan $z(0) = 30$. Grafik pertumbuhan $x(t)$ terus menerus bergerak naik yang dimulai pada $t = 0$ hingga $t = 15$ yang mencapai 611.4024673183166. Pergerakan grafik pertumbuhan $y(t)$ terus menerus mengalami penurunan hingga $t = 12.8$ yang mencapai 744×10^{-13}, kemudian bergerak naik sampai $t = 15$ yang mencapai 1242×10^{-13}. Pergerakan grafik pertumbuhan $z(t)$ mengalami kenaikan hingga $t = 0.55$ yang mencapai 49.2701211424194 selanjutnya terus menerus mengalami penurunan hingga $t = 15$ yang mencapai 2.8441569732802 .

Dengan menggunakan metode RKF orde-5 maka diperoleh grafik $x(t), y(t)$, dan $z(t)$ pada saat $t = 15$ dengan nilai parameter pada Tabel 3.4 sebagai berikut



Gambar 3.3 Grafik $\boldsymbol{x(t), y(t)}$, dan $\boldsymbol{z(t)}$ pada saat $\boldsymbol{t = 15}$ Metode RKF Orde-5.

Gambar 3.3 menunjukkan populasi $x(t), y(t)$, dan $z(t)$ yang dimulai pada saat $t = 0$ dengan nilai parameter yang telah disajikan pada Tabel 3.4. Dengan nilai awal $x(0) = 70, y(0) = 35$, dan $z(0) = 30$. Grafik pertumbuhan $x(t)$ bergerak naik terus menerus hingga $t = 15$ yang mencapai 611.3808654717798. Pergerakan grafik pertumbuhan $y(t)$ terus menerus mengalami penurunan hingga $t = 12.85$ yang mencapai 772×10^{-13} kemudian bergerak naik dari sampai $t = 15$ yang mencapai 129×10^{-12}. Grafik pertumbuhan $z(t)$ bergerak naik hingga $t = 0.55$ yang mencapai 49.2579280294754 kemudian mengalami penurunan terus menerus hingga $t = 15$ yang mencapai 2.8442094361629.

Berdasarkan Gambar 3.2 dan Gambar 3.3 dapat dijelaskan bahwa peningkatan laju populasi x yang secara terus menerus disebabkan pergerakan populasi y yang menurun begitu cepat sehingga pengaruh predasi terhadap populasi x sangat kecil . Laju penurunan populasi y tersebut disebabkan besarnya tingkat kematian alami Pemangsa I dan juga pengaruh predasi oleh Pemangsa II. Dan ketika laju populasi y menurun maka mangsa untuk Predator II menjadi berkurang dan mengakibatkan laju populasi z juga ikut menurun.

Dari penjelasan diatas dapat disimpulkan bahwa perubahan populasi dari setiap variabel bergantung pada besar kecilnya parameter-parameter yang mempengaruhi pertumbuhan populasi tersebut. Dalam kasus ini keseimbangan ekosistem tidak terjadi. Dalam kehidupan, keseimbangan ekosistem itu perlu, namun tidak dapat dipungkiri bahwa dalam suatu ekosistem terjadi ketidakseimbangan.

4. Kesimpulan dan Saran

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan

1. Skema numerik metode Runge-Kutta Fehlberg untuk sistem persamaan Lotka-Volterra tiga spesies dilakukan dengan beberapa tahap yaitu:
   a. Menentukan $x(0) = 70, y(0) = 35$ dan $z(0) = 30$ dan nilai parameter $a = 0.15, b = 0.01, c = 0.45,\ d = 0.002,\ e = 0.1, p = 0.2,\ q = 0.08$.

b. Menentukan $t = 0$ sampai $t = 15$ dan $h = 0.05$.

c. Menuliskan formulasi model dengan mensubtitusikan nilai t dan h yang ada pada langkah (b).

$\frac{dx}{dt} = 0{,}15x - 0{,}01xy,$

$\frac{dy}{dt} = -0{,}45y + 0{,}002xy - 0{,}1yz,$

$\frac{dz}{dt} = -0{,}2z + 0{,}08yz.$

d. Menghitung nilai k_1 sampai k_6 , l_1 sampai l_6 dan m_1 sampai m_6 dengan menggunakan formulasi rumus yang telah ditentukan.

e. Menghitung solusi

Orde-4:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}l_1 + \frac{1408}{2565}l_3 + \frac{2197}{4104}l_4 - \frac{1}{5}l_5$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{25}{216}m_1 + \frac{1408}{2565}m_3 + \frac{2197}{4104}m_4 - \frac{1}{5}m_5 .$$

Orde-5 :

$$u_{i+1} = x_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56437}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

$$v_{i+1} = y_i + \frac{16}{135}l_1 + \frac{6656}{12825}l_3 + \frac{28561}{56437}l_4 - \frac{9}{50}l_5 + \frac{2}{55}l_6$$

$$w_{i+1} = z_i + \frac{16}{135}m_1 + \frac{6656}{12825}m_3 + \frac{28561}{56437}m_4 - \frac{9}{50}m_5 + \frac{2}{55}m_6 .$$

2. Dalam penelitian ini dengan $h = 0.05$ dan $t = 15$, dihasilkan perhitungan metode RKF orde-4 dengan solusi $x = 612.4778414559795$, $y = 1715 \times 10^{-13}$, dan $z = 2.8497040826749$, sedangkan untuk RKF orde-5 diperoleh solusi $x = 612.3976830426056$, $y = 172 \times 10^{-12}$, dan $z = 2.8501931780485$. Dari hasil perhitungan tersebut didapatkan galat pemotongan metode RKF pada $t = 15$ yaitu $0 < \varepsilon_x < 1$, $0 < \varepsilon_y < 1$ dan $0 < \varepsilon_z < 1$dengan nilai ε_x= 0.000017266067175, $\varepsilon_y = 1 \times 10^{-15}$, dan $\varepsilon_z = 414337671 \times 10^{-15}$. Sehingga dapat dikatakan bahwa solusi yang diperoleh dengan metode RKF mendekati solusi eksak. Dari hasil analisis numerik dapat disimpulkan bahwa peningkatan laju populasi x yang secara terus menerus disebabkan pergerakan populasi y yang menurun begitu cepat . Laju penurunan populasi y tersebut disebabkan besarnya tingkat kematian alami Pemangsa I. Dan ketika laju populasi y menurun maka mangsa untuk Predator II menjadi berkurang yang mengakibatkan laju populasi z juga ikut menurun. Perubahan populasi dari setiap variabel bergantung pada besar kecilnya parameter-parameter yang mempengaruhi pertumbuhan populasi tersebut. Dalam kasus ini keseimbangan ekosistem tidak terjadi. Dalam kehidupan, keseimbangan ekosistem itu perlu, namun tidak dapat dipungkiri bahwa dalam suatu ekosistem terjadi ketidakseimbangan.

Ucapan Terima kasih

Saya ucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing dan tim penguji yang telah memberikan saran dan dukungan dalam penyusunan Tugas Akhir ini serta pihak-pihak yang telah memfasilitasi dan membantu berjalannya penelitian ini.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya penulis menyarankan menggunakan model matematika lain dan dalam penyelesaian numerik nya bisa menggunakan metode RKF atau metode berorde tinggi lainnya.

Daftar Pustaka

[1] A. Rachmawati. *Analisis Model Matermatika Rantai Makanan Tiga Tingkat dengan Adanya Mangsa Terinfeksi*. Universitas Airlangga. Surabaya. (2016).

[2] Apriadi dan Prihandoko. *Metode Adams Bashforth Moulton dalam penyeelesaian Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier*. Buletin Ilmiah Mat. Stat dan Terapan . (2014). 3:107-116.

[3] Baiduri. *Persamaan Diferensial dan Matematika Mode*l. UMM Pres. Malang. (2012).

[4] Brauer dan C. Castillo-Chauves. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemology*. Springer. New York. (2010).

[5] Butcher. *Numerical Method for Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Suns Ltd. England. (2008).

[6] Chauvet, dkk. *A Lotka-Volterra Three Species Food Chain*. Mathematics Magazine. (2002). 75:234-255.
[7] Didiharyono. *Stability Analysis of One Prey Two Predator Model with Holling Type III Function Response and Harvesting*. Journal of Math Sciences . (2016).50-54.
[8] Djojodihardjo. *Metode Numerik*. PT Gramedia Pustaka. Jakarta. (2000).
[9] E. J .Purcell. *Calculus with Analytic Geometry 5th Edition*. Erlangga. Jakarta. (1999).
[10] Lambert. *Numerical Method for Ordinary Differential System*. John Wiley and Sons. New York. (1997).
[11] Kartono. *Persamaan Diferensial Biasa: Model Matematika Fenomena Perubahan*. Graha Ilmu. Yogyakarta. (2012).
[12] Mathews dan Kurtis. *Numerical Methods Using Matlab. Forth Editions*. The Prentice Hall, Inc. New Jersey. (2004).
[13] N. Campbell, dkk. *Biologi*. Erlangga. Jakarta. (2004).
[14] Purnomo. *Persamaan Diferensial*. Bayumedia . Malang. (2012).
[15] R Bronson dan G. Costa. *Differential Equations*. The Mc Grow-Hill Companies, Inc. New Jersey. (2007).
[16] R. Munir. *Metode Numerik*. Informatika. Bandung. (2006).
[17] Sembel. *Toksikologi Lingkungan*. Yogyakarta. (2015).
[18] S. Ross. *Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc. New York. (1984).
[19] S. Waluya. *Persamaan Diferensial*. Graha Ilmu. Yogyakarta. (2006).
[20] Sugiyarto. (2015). *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Binafsi Publisher.
[21] Sugiyono. *Metode Penelitian Kuantitatif, Kulalitatif dan R&D*. Alfabeta. Bandung. (2013).
[22] Triatmodjo. *Metode Numerik*. Beta Offset. Yogyakarta. (2002).
[23] T. Ritschel. *Numerical Methods for Solution of Differential Equations*. Department of Applied Mathematics and Computer Science. Lyngby. (2013).
[24] W. Boyce dan R. Diprima . *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (10th ed.)*. John Wiley and Sons, Inc. New Jersey. (2012).
[25] W. Gautschi. *Numerical Analysis* . West Lafayette. (2011).

Diterima tgl. 19 September 2024
Direvisi tgl. 7 Desember 2024
Disetujui untuk terbit tgl. 15 Desember 2024