

MODEL SVEITR PADA PENYEBARAN PENYAKIT TUBERCULOSIS DENGAN FAKTOR VAKSINASI DAN TREATMENT

Muhammad Sarman Hamdin¹⁾

¹⁾Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: hamdinsarman@gmail.com¹⁾

Asrul Sani^{1,a)}, dan Kabil Djafar^{1,b)}

¹⁾Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia
Email: ^{a)}saniasrul1969@gmail.com, dan ^{b)}kabildjafar@uho.ac.id.

ABSTRAK

Tuberculosis adalah penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri basil *Mycobacterium tuberculosis*. Tuberculosis menular dari manusia ke manusia melalui percikan ludah (droplet) ketika penderita berbicara, bersin atau batuk. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan Model SVEITR pada penyebaran penyakit Tuberculosis dengan faktor vaksinasi dan treatment serta perilaku selesainya. Pembentukan model diawali dengan membuat diagram alur penyebaran penyakit tuberculosis dengan faktor vaksinasi dan treatment menggunakan model SVEITR. Dari Hasil analisis diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit menggunakan linearisasi disekitar titik kesetimbangan, hasilnya diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit memiliki dua sifat kestabilan yaitu stabil asimtotik dan spiral (tidak stabil). Stabil asimtotik akan terjadi jika $R_0 < 1$, artinya penyakit akan menghilang setelah jangka waktu tertentu dengan nilai $R_0 = \frac{\beta\alpha\gamma}{(\varepsilon+\mu)(\gamma+\mu)(\theta+\mu)}$. Sedangkan apabila $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil (*Spiral*) dan sebaliknya apabila titik kesetimbangan endemik positif akan bersifat spiral stabil. Pada penelitian ini dilakukan simulasi numerik untuk melihat dinamika populasi dengan melakukan variasi pada nilai-nilai parameter.

Kata kunci: Tuberculosis, Model SVEITR, Kestabilan Titik Kesetimbangan, Bilangan Reproduksi Dasar

ABSTRACT

*Tuberculosis is an infectious disease caused by the Mycobacterium tuberculosis bacillus. Tuberculosis is transmitted from human to human through droplets of saliva when the patient speaks, sneezes or coughs. The purpose of this study is to determine the SVEITR Model on the spread of Tuberculosis disease with vaccination and treatment factors and their design behavior. The formation of the model begins with making a flowchart of the spread of tuberculosis disease with vaccination and treatment factors using the SVEITR model. The results of the analysis obtained two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. Analysis of the stability of the disease equilibrium point using linearization around the equilibrium point, the results obtained the disease-free equilibrium point has two stability properties, namely asymptotically stable and spiral (unstable). Asymptotically stable will occur if $R_0 < 1$, meaning that the disease will disappear after a certain period of time with the value $R_0 = \frac{\beta\alpha\gamma}{(\varepsilon+\mu)(\gamma+\mu)(\theta+\mu)}$. Where as if $R_0 > 1$ then the equilibrium point is unstable (*Spiral*) and vice versa if the endemic equilibrium point positif will be spiral stable. In this study, numerical simulations were carried out to see the population dynamics by varying the values of the parameters.*

Keywords: Tuberculosis, SVEITR Model, Stability of Equilibrium Points, Basic Reproduction Number

1. Pendahuluan

Tuberculosis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri basil *Mycobacterium tuberculosis*. Tuberculosis menular dari manusia ke manusia melalui percikan ludah (droplet) ketika

penderita berbicara, bersin atau batuk. Bakteri yang dihirup ke dalam paru-paru, akan menyebar kebagian organ tubuh lainnya melalui sistem peredaran darah. Sebagian besar tuberculosis menyerang manusia

dibagian organ tubuh paru-paru tetapi bisa juga menyerang organ tubuh lainnya[1].

Tuberculosis termasuk penyakit yang paling banyak menyerang usia produktif. Penderita tuberculosis yang telah positif dapat menularkan penyakit pada segala usia. Penularan tuberculosis pada orang yang berjenis kelamin laki-laki lebih besar daripada orang yang berjenis kelamin perempuan di karenakan laki-laki yang kurang memperhatikan pemeliharaan kesehatan serta kebiasaan merokok dan konsumsi alkohol yang mengakibatkan menurunnya imunitas tubuh[2].

Penyakit tuberculosis menjadi salah satu masalah kesehatan di berbagai negara di dunia termasuk Indonesia. Setiap tahunnya, tuberculosis menyebabkan lebih dari 2 juta kematian dan diperparah dengan munculnya bakteri tuberculosis baru yang resisten terhadap obat. Wilayah Asia Tenggara menyumbang 39% dari total kejadian tuberculosis diseluruh dunia dan sekitar 3,4 juta kasus baru yang terus terjadi setiap tahunnya. Insiden tuberculosis global terjadi pada tahun 2016 dengan jumlah 10,4 juta kasus. Indonesia menjadi negara dengan jumlah penderita tuberculosis terbanyak ketiga setelah India dan China[3].

Penyebaran penyakit tuberculosis dapat dianalisis sifat-sifatnya dengan menggunakan pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang digunakan untuk merepresentasi dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau suatu permasalahan ke dalam pernyataan matematika. Tujuan pemodelan adalah memungkinkan dilakukan proses pengambilan keputusan mengenai situasi nyata dengan menganalisis model-model tersebut [4].

Model matematika yang digunakan pada penyebaran penyakit tuberculosis yaitu SVEITR. Pada model ini, populasi dibagi menjadi enam yakni populasi rentan (*Susceptible*), populasi vaksinasi (*Vaccination*), populasi terpapar ke dalam masa inkubasi (*Exposed*), populasi terinfeksi (*Infectious*), populasi terobati (*Treatment*) dan populasi sembuh (*Recovered*).

Pada bagian kedua dibahas tentang tinjauan pustaka yang berisi tentang sistem persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial linear dan non linear, titik kesetimbangan, linearisasi dan bilangan reproduksi dasar. Bagian ketiga akan dibahas metode yang digunakan pada penelitian ini. Pada bagian keempat dibahas hasil dan pembahasan pada penelitian ini, yaitu mengenai perilaku selesaian dari model SVEITR padapenyebaran penyakit tuberculosis dengan vektor vaksinasi dan treatment. Pada bagian kelima diakhiri dengan penutup yang berisikan kesimpulan dan saran.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Tuberculosis

Tuberculosis merupakan penyakit menular disebabkan oleh *Mycobacterium tuberculosis (Mtb)*, yang ditularkan melalui udara lewat percikan ludah (droplet) ketika penderita berbicara, bersin atau batuk. Droplet yang mengandung kuman dapat bertahan di udara pada suhu kamar selama beberapa jam. Seseorang dapat terinfeksi ketika droplet yang mengandung kuman *Mtb* terhirup saat bernafas. Tindakan yang dapat dilakukan untuk mencegah dan menangani penularan tuberculosis adalah dengan melakukan vaksinasi BCG dan penggunaan obat-obatan[5].

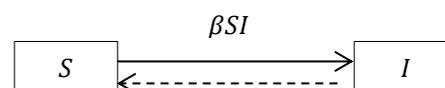
Vaksinasi BCG (*Bacillus Calmette-Guerin*) merupakan salah satu upaya pencegahan tuberculosis untuk meningkatkan kekebalan tubuh secara aktif. Pemberian vaksin BCG merupakan tindakan rutin yang telah diterapkan di Indonesia. Selain melakukan vaksinasi, penyakit tuberculosis juga dapat disembuhkan dengan meminum obat-obatan. Pengobatan penyakit ini membutuhkan waktu selama 6 – 8 bulan lamanya. Pengobatan penyakit tuberculosis terbagi menjadi dua fase yaitu fase intensif (dua bulan pengobatan), dan fase lanjutan[6].

2.2 Model Epidemik

2.2.1 Model SI

Model epidemik SI membagi dua golongan populasi yaitu populasi *susceptible* (S) dan *infected* (I). *Susceptible* (S) dalam pemodelan SI merupakan kelompok populasi yang tidak terinfeksi tetapi dapat tertular oleh penyakit, sehingga kelompok ini memiliki kemungkinan untuk terinfeksi dan berpindah ke kelas *infected* (I). *Infected* (I) merupakan kelompok populasi yang terinfeksi penyakit dan dapat menularkan ke populasi sehat[7]. Skema model dari epidemik SI yaitu:

Gambar 2.1 Diagram Model SI



Model Matematika dari SI adalah:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI$$

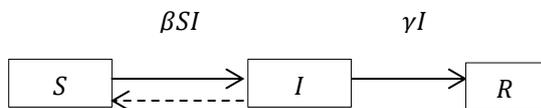
2.2.2 Model SIR

Model epidemik tipe *SIR* dibagi dalam tiga jenis populasi yaitu populasi *susceptible* (S), populasi *infected* (I) dan populasi *recovered* (R). Populasi *susceptible* (S) adalah populasi yang terdiri dari individu yang tidak terkena penyakit namun mempunyai potensi untuk tertular penyakit. Populasi *Infected* (I) adalah populasi yang telah terinfeksi

penyakit. Sedangkan populasi *recovered* (R) adalah populasi yang terdiri dari individu yang telah sembuh dari penyakit[8].

Skema dari model *SIR* yaitu

Gambar 2.2 Diagram Model *SIR*



Model Matematika dari *SIR* adalah:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

2.2.3 Model SEIR

Model kompartemen untuk transmisi infeksi dengan individu yang terpapar (laten) disebut *SEIR*, dimana terdapat individu yang terinfeksi tetapi belum menular dan memiliki kekebalan permanen ketika pulih dari infeksi.

Model epidemik ini secara umum terbagi menjadi empat populasi yaitu:

S: kelas *Susceptible*, adalah kelas yang berisi individu yang rentan atau dapat terkena penyakit

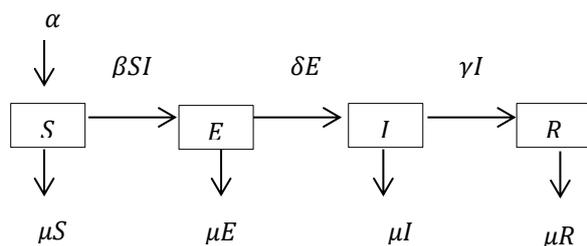
E: kelas *Exposed*, adalah kelas yang berisi individu yang terpapar ke dalam masa inkubasi

I: kelas *Infected*, adalah kelas yang berisi individu yang terkena penyakit dan dapat menularkan penyakit kepada individu pada kelas *Susceptible*

R: kelas *Recovered*, adalah kelas yang berisi individu yang sudah sembuh dan kebal terhadap penyakit[9].

Skema dari model *SEIR* yaitu

Gambar 2.3 Diagram Model *SEIR*



Model Matematika dari *SEIR* adalah:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \delta E - \mu E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

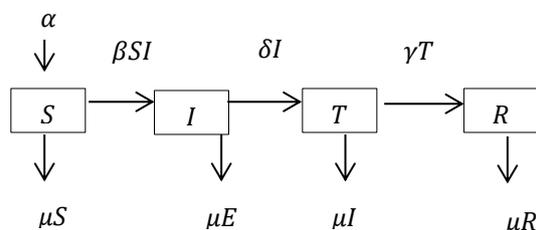
2.2.4 Model SITR

Model epidemik *SITR* dibagi menjadi 4 kelompok populasi yaitu:

1. *Susceptible* (S) adalah individu yang rentan penyakit.
2. *Infected* (I) adalah individu yang sudah terinfeksi penyakit dan dapat menularkan penyakit ke individu lainnya.
3. *Treatment* (T) adalah kelas individu yang terinfeksi penyakit lalu mendapatkan pengobatan atau *treatment*.
4. *Recovered* (R) adalah individu yang diasumsikan telah sembuh atau kekebalan tubuhnya telah kembali normal sehingga kebal terhadap penyakit[10].

Skema dari model *SITR* yaitu:

Gambar 2.4 Diagram Model *SITR*



Model Matematika dari *SITR* adalah:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \beta SI - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\delta + \mu)I$$

$$\frac{dT}{dt} = \delta I - (\gamma + \mu)T$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma T - \mu R$$

2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.1 (Anton & Rorres, 2004) Jika *A* adalah matriks $n \times n$ maka sebuah vektor tak nol \mathbf{x} pada R^n disebut vektor eigen dari *A* jika $A\mathbf{x}$ adalah kelipatan skalar dari \mathbf{x} yaitu

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Untuk skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen dari *A* dan \mathbf{x} dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Teorema 2.1 (Anton & Rorres, 2004) Jika *A* adalah matriks $n \times n$ maka λ adalah nilai eigen dari *A* sedemikian sehingga

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ disebut persamaan karakteristik dari *A*.

2.4 Sistem Persamaan Diferensial

Menurut Ndi (2018) Persamaan diferensial merupakan persamaan matematika yang memuat fungsi dan turunannya. Persamaan diferensial sering kali muncul dalam model yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan yang ada di dunia nyata.

Berdasarkan kelinearannya, sistem persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu sistem persamaan linear dan sistem persamaan diferensial nonlinear.

Definisi 2.2 (Tu, 1994) Suatu sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + b, x(0) = x_0$$

Dengan A adalah matriks koefisien konstan berukuran $n \times n$ dan b adalah vektor konstan. Sistem persamaan diferensial tersebut disebut sistem persamaan diferensial biasa linear orde satu dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Jika $b = 0$ maka sistem dikatakan homogen sedangkan jika $b \neq 0$ maka sistem dikatakan tak homogen.

Definisi 2.3 (Braun, 1993) Suatu sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

$$\text{dengan } x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ dan } f(t, x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

adalah fungsi tak linear dalam x_1, x_2, \dots, x_n

Sistem (2.6) disebut sistem persamaan diferensial tak linear.

2.5 Titik Kesetimbangan

Solusi dari suatu sistem yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu disebut titik kesetimbangan atau titik tetap. Titik kesetimbangan dapat diklasifikasi menjadi dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah ketika kelas terinfeksi nol atau ketika penyakit tidak menyebar dalam populasi. Titik kesetimbangan endemik adalah titik kesetimbangan ketika kelas yang terinfeksi tidak nol atau ketika penyakit menyebar dalam populasi.

Definisi 2.4 (Perko, 2001) Titik $x_0 \in R^n$ disebut titik ekuilibrium atau titik kritis dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f(x_0) = 0$

Definisi 2.5 (Olsder & Woude, 2003) Diberikan suatu persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$ yang memiliki solusi $x(t, x_0)$ dengan kondisi awal $x(0) = x_0$ Titik ekuilibrium \bar{x} dikatakan

1. Stabil, jika $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga, jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \epsilon$ untuk setiap $t \geq 0$

2. Stabil asimtotik, jika stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$, maka $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$
3. Tidak stabil jika definisi 1 tidak terpenuhi.

2.6 Linearisasi

Linearisasi merupakan proses membentuk suatu sistem nonlinear menjadi sistem linear. Linearisasi dilakukan pada sistem persamaan nonlinear yang bertujuan untuk mengetahui perilaku sistem disekitar titik ekuilibrium. Linearisasi pada sistem nonlinear dimaksudkan agar memperoleh aproksimasi yang baik. Pencarian suatu hampiran solusi di sekitar titik kesetimbangan pada proses linearisasi dapat dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor.

Definisi 2.5 (Hale & Kocak, 1991) Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$. Matriks

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \text{ dinamakan matriks}$$

Jacobian f di titik \bar{x} .

2.7 Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai eigen dapat diperoleh dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A)$, tetapi akar persamaan karakteristik seringkali tidak mudah ditemukan. Kriteria Routh-Hurwitz adalah metode yang digunakan untuk menunjukkan suatu kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien-koefisien persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akarnya secara langsung.

Definisi 2.6 (Keshet, 2005) Diberikan suatu sistem persamaan karakteristik dalam bentuk polynomial sebagai berikut:

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0$$

Dimana $a_0 = 1$ dan a_k dengan $k = 1, 2, \dots, n$ adalah bilangan real.

Maka didefinisikan k matriks sebagai berikut:

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} \dots$$

$$H_j = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & a_j \end{bmatrix} \dots$$

$$H_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_j \end{bmatrix}$$

Semua nilai eigen dari persamaan karakteristik mempunyai bagian riil yang negatif (titik tetap \bar{x} stabil) jika dan hanya jika determinan dari matriks Hurwitz positif, yaitu

$$\det H_j > 0 \text{ untuk setiap } j = 1, 2, \dots, k.$$

2.8 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar adalah rata-rata banyaknya individu yang rentan terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi, dan masuk kedalam populasi yang seluruhnya masih rentan. Bilangan reproduksi dasar disimbolkan dengan R_0 . Penentuan bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan mencari nilai eigen terbesar dari matriks generasi selanjutnya

Kondisi yang timbul dari pencarian bilangan reproduksi dasar diantaranya:

1. Jika $R_0 > 1$ maka penyakit akan meningkat dan menjadi wabah
2. Jika $R_0 < 1$ maka penyakit akan menghilang
3. Jika $R_0 = 1$ maka penyakit akan menetap

2.9 Matriks Generasi Selanjutnya

Pada model kompartemen untuk penularan penyakit, suatu kompartemen (kelas) disebut kompartemen penyakit jika individu-individu di dalamnya terinfeksi penyakit. Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya jika x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi. Dimana $x, y \in R^n$ untuk $m, n \in N$, sehingga

$$x = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y) \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n$$

$$y = \eta_j(x, y) \text{ dengan } j = 1, 2, \dots, m$$

Dengan φ_i adalah laju infeksi sekunder kelas yang menambah pada kelas terinfeksi dan ψ_i adalah laju perkembangan penyakit, kematian atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari kelas terinfeksi.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linearisasi sistem persamaan diferensial pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Persamaan kompartemen terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat ditulis sebagai berikut.

F dan V adalah matriks berukuran $n \times n$ yang didefinisikan oleh

$$F = \frac{\partial \varphi_i(x_0)}{\partial u_j} \text{ dan } V = \frac{\partial \psi_i(x_0)}{\partial u_j}$$

dimana x_0 adalah titik kesetimbangan bebas penyakit. Selanjutnya didefinisikan K sebagai berikut:

$$K = FV^{-1}$$

Dengan K disebut sebagai matriks generasi selanjutnya. Nilai dari bilangan reproduksi dasar adalah nilai eigen terbesar dari matriks K , sehingga diperoleh:

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

3. Metode

Adapun metode penelitian yang penulis lakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Studi literatur yang berkaitan dengan penyebaran penyakit Tuberculosis
2. Membuat asumsi model penyebaran penyakit tuberculosis dengan faktor vaksinasi dan treatment.

3. Membuat model SVEITR dengan faktor vaksinasi dan treatment berdasarkan asumsi yang telah dibuat.
4. Menyelesaikan analisis kestabilan dengan mencari titik kesetimbangan, melakukan linearisasi model dengan menggunakan matriks Jacobi, dan mengidentifikasi sifat kestabilan dari titik kesetimbangan yang diperoleh.
5. Melakukan simulasi numerik dari model SVEITR pada penyebaran penyakit tuberculosis dengan faktor vaksinasi dan treatment.
6. Mengintrepetasikan hasil yang diperoleh.
7. Menarik kesimpulan.

4. Hasil dan Pembahasan

4.1 Asumsi Model

Asumsi pembentukan model matematika dari penyebaran penyakit tuberculosis dapat ditulis sebagai berikut.

1. Penyakit diasumsikan fatal dan dapat menyebabkan kematian.
2. Setiap individu yang lahir rentan terhadap penyakit
3. Penyakit menular melalui kontak langsung antara individu rentan dengan penderita
4. Individu yang terpapar penyakit memiliki masa inkubasi.
5. Individu yang terinfeksi penyakit dapat disembuhkan dengan treatment/diobati, dengan kondisi pengobatan yang dilakukan secara lengkap.
6. Individu yang sudah sembuh akan kebal terhadap penyakit.
7. Individu rentan yang baru lahir diberikan vaksinasi akan kebal terhadap penyakit

Berdasarkan asumsi untuk model SVEITR pada penyebaran penyakit tuberculosis dengan faktor vaksinasi dan treatment diperoleh model yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \alpha - \beta SI - (\varepsilon + \mu)S \\ \frac{dV}{dt} &= \varepsilon S - (p + \mu)V \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\gamma + \mu)E \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - (\theta + \mu)I$$

$$\frac{dT}{dt} = \theta I - (\delta + \mu)T$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta T + pV - \mu R$$

Keterangan:

- $S(t)$: Jumlah individu yang rentan pada waktu ke- t .
 $V(t)$: Jumlah individu yang telah melakukan vaksinasi pada waktu ke- t .
 $E(t)$: Jumlah individu yang terpapar penyakit sampai waktu ke- t .
 $I(t)$: Jumlah individu yang terinfeksi pada waktu ke- t .
 $T(t)$: Jumlah individu yang terinfeksi kemudian ditreatment pada waktu ke- t .

$R(t)$: Jumlah individu yang sembuh atau kebal dari penyakit pada waktu ke- t

α : Angka kelahiran pada manusia

μ : Laju kematian pada manusia

β : Laju penularan penyakit

γ : Laju transfer dari individu yang terpapar ke individu yang terinfeksi

θ : Laju transfer dari individu terinfeksi ke individu yang ditreatment

δ : Laju transfer dari individu telah ditreatment ke individu yang sembuh

ε : Laju individu yang telah melakukan vaksinasi

p : Laju transfer dari individu yang telah melakukan vaksinasi ke individu yang sembuh.

4.2 Analisis Model

Model SVEITR pada penyebaran penyakit tuberculosis dengan faktor vaksinasi dan treatment berupa sistem persamaan diferensial nonlinear. Sistem (1) memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Sistem (1) yang diperoleh dengan menyelesaikan

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0 \quad (2)$$

Selanjutnya Persamaan (2) dapat ditulis sebagai berikut.

$$f_1 = \alpha - \beta SI - (\varepsilon + \mu)S = 0 \quad (3)$$

$$f_2 = \varepsilon S - (p + \mu)V = 0 \quad (4)$$

$$f_3 = \beta SI - (\gamma + \mu)E = 0 \quad (5)$$

$$f_4 = \gamma E - (\theta + \mu)I = 0 \quad (6)$$

$$f_5 = \theta I - (\delta + \mu)T = 0 \quad (7)$$

$$f_6 = \delta T + pV - \mu R = 0 \quad (8)$$

4.2.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan titik kesetimbangan pada saat tidak ada penyakit dalam populasi sehingga $I = 0$, dengan mensubstitusi nilai $I = 0$ pada Sistem (1) maka akan diperoleh nilai titik kesetimbangan bebas penyakit (E_1) dari S, V, E, T, R yaitu sebagai berikut.

$$S = \frac{\alpha}{\varepsilon + \mu}$$

$$V = \frac{\varepsilon \alpha}{(\varepsilon + \mu)(p + \mu)}$$

$$E = 0$$

$$T = 0,$$

$$R = \frac{\varepsilon \alpha}{(\varepsilon + \mu)(p + \mu)}$$

4.2.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik adalah titik kesetimbangan yang terjadi saat kelas terinfeksi tidak sama dengan nol ($I \neq 0$), dengan menggunakan

operasi aljabar pada Sistem (1), diperoleh titik kesetimbangan Endemik (E_2) yaitu sebagai berikut.

$$S^* = \frac{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}{\beta \gamma}$$

$$V^* = \frac{\varepsilon(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}{(p + \mu)\beta \gamma}$$

$$E^* = \frac{\alpha \beta \gamma - (\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}{\beta \gamma (\gamma + \mu)}$$

$$I^* = \frac{\alpha \beta \gamma - (\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}{\beta (\theta + \mu)(\gamma + \mu)}$$

$$T^* = \frac{\theta(\alpha \beta \gamma - (\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \mu))}{\beta (\theta + \mu)(\gamma + \mu)(\delta + \mu)}$$

$$R^* = \frac{\delta(\alpha \beta \gamma \theta - (\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \mu)\theta)}{\beta \mu (\theta + \mu)(\gamma + \mu)(\delta + \mu) + \frac{p(\varepsilon(\gamma + \mu)(\theta + \mu))}{(p + \mu)\beta \gamma \mu}}$$

4.2.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) dari Sistem (1) dengan mencari nilai eigen terbesar yang diperoleh dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya. Pada model SVEITR, kelas yang menyebarkan infeksi adalah kelas E dan I .

Diketahui persamaan diferensial yang dipakai yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= f_3 = \beta SI - (\gamma + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} &= f_4 = \gamma E - (\theta + \mu)I \end{aligned} \quad (9)$$

Matriks Jacobian dari Sistem (9) sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{df_3}{dE} & \frac{df_3}{dI} \\ \frac{df_4}{dE} & \frac{df_4}{dI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\gamma + \mu) & \beta S \\ \gamma & -(\theta + \mu) \end{bmatrix}$$

Matriks Jacobian di atas dapat tulis menjadi $J = F - V$, dengan F merupakan matriks laju penularan penyakit dan V merupakan matriks laju perkembangan kematian dan kesembuhan yang mengurangi kelas infeksi.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \gamma + \mu & 0 \\ -\gamma & \theta + \mu \end{bmatrix}$$

Terlebih dahulu mencari nilai invers dari matriks V :

$$V = \begin{bmatrix} \gamma + \mu & 0 \\ -\gamma & \theta + \mu \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu) - (-\gamma)(0)} \begin{bmatrix} \theta + \mu & 0 \\ \gamma & \gamma + \mu \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)} \begin{bmatrix} \theta + \mu & 0 \\ \gamma & \gamma + \mu \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\gamma + \mu)} & 0 \\ \frac{\gamma}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)} & \frac{1}{(\theta + \mu)} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya substitusi nilai kesetimbangan bebas penyakit E_1 pada matriks F diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta\left(\frac{\alpha}{\varepsilon + \mu}\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya didapatkan matriks K . Dimana $K = FV^{-1}$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(\gamma + \mu)} & 0 \\ \gamma & 1 \\ (\gamma + \mu)(\theta + \mu) & (\theta + \mu) \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{\beta\alpha\gamma}{(\varepsilon + \mu)((\gamma + \mu)(\theta + \mu))} & \frac{\beta\alpha}{(\varepsilon + \mu)(\theta + \mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian ditentukan nilai eigen matriks K yang diperoleh dari persamaan

$$\det|\lambda I - FV^{-1}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\beta\alpha\gamma}{(\varepsilon + \mu)((\gamma + \mu)(\theta + \mu))} & \frac{\beta\alpha}{(\varepsilon + \mu)(\theta + \mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - \frac{\beta\alpha\gamma}{(\varepsilon + \mu)((\gamma + \mu)(\theta + \mu))} & \frac{\beta\alpha}{(\varepsilon + \mu)(\theta + \mu)} \\ 0 & \lambda - 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left[\left(\lambda - \frac{\beta\alpha\gamma}{(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \mu)} \right) \lambda \right] = 0$$

Sehingga diperoleh $\lambda_1 = 0$ atau $\lambda_2 = \frac{\beta\alpha\gamma}{(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}$

Karena bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh dari nilai eigen terbesar dari matriks, maka:

$$R_0 = \frac{\beta\alpha\gamma}{(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}$$

Selanjutnya, akan dicari bilangan reproduksi dasar untuk titik kesetimbangan endemik (R_{0^*}) dengan mensubstitusi nilai titik kesetimbangan endemik E_2 pada matriks F diperoleh

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & \beta\left(\frac{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}{\beta\gamma}\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya didapatkan matriks K_2 . Dimana $K_2 = F_2V^{-1}$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(\gamma + \mu)} & 0 \\ \gamma & 1 \\ (\gamma + \mu)(\theta + \mu) & (\theta + \mu) \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{\gamma\mu + \gamma\theta + \mu^2 + \mu\theta}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)} & \frac{\gamma\mu + \gamma\theta + \mu^2 + \mu\theta}{\gamma(\theta + \mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian ditentukan nilai eigen matriks K_2 yang diperoleh dari persamaan

$$\det|\lambda I - F_2V^{-1}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\gamma\mu + \gamma\theta + \mu^2 + \mu\theta}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)} & \frac{\gamma\mu + \gamma\theta + \mu^2 + \mu\theta}{\gamma(\theta + \mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - \frac{\gamma\mu + \gamma\theta + \mu^2 + \mu\theta}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)} & \frac{\gamma\mu + \gamma\theta + \mu^2 + \mu\theta}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)} \\ 0 & \lambda - 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left[\left(\lambda - \frac{\gamma\mu + \gamma\theta + \mu^2 + \mu\theta}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)} \right) \lambda \right] = 0$$

Sehingga diperoleh $\lambda_1 = 0$ atau $\lambda_2 = \frac{\gamma\mu + \gamma\theta + \mu^2 + \mu\theta}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}$

Karena bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh dari nilai eigen terbesar dari matriks, maka bilangan reproduksi dasar R_{0^*} untuk titik kesetimbangan endemik adalah:

$$R_{0^*} = \frac{\gamma\mu + \gamma\theta + \mu^2 + \mu\theta}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}$$

4.2.4 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan dilakukan dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh melalui metode linearisasi sistem disekitar titik kesetimbangan dari Sistem (1), diperoleh matriks jacobian sebagai berikut.

$$J(E) = \begin{bmatrix} -\beta I - \varepsilon - \mu & 0 & 0 & -\beta S & 0 & 0 \\ \varepsilon & -\mu - p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta I & 0 & -\gamma - \mu & \beta S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\theta - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta & -\delta - \mu & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & \delta & -\mu \end{bmatrix}$$

Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dari Sistem (1) dapat ditentukan dengan mensubstitusi titik kesetimbangan bebas penyakit E_1 ke matriks Jacobian $J(E)$ sehingga diperoleh

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\varepsilon - \mu & 0 & 0 & -\frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} & 0 & 0 \\ \varepsilon & -\mu - p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma - \mu & \frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\theta - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta & -\delta - \mu & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & \delta & -\mu \end{bmatrix}$$

Suatu titik ekuilibrium dinyatakan stabil apabila semua nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh bernilai negatif. Nilai eigen dari matriks $J(E_1)$ dapat dicari dengan menemukan akar-akar dari persamaan karakteristik yang diperoleh dari persamaan berikut

$$\det(\lambda I - J(E_1)) = 0$$

diperoleh

$$\begin{vmatrix} \lambda + \varepsilon + \mu & 0 & 0 & -\frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} & 0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda + \mu + p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \gamma + \mu & \frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \lambda + \theta + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta & \lambda + \delta + \mu & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & \delta & \lambda + \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu) \begin{vmatrix} \lambda + \varepsilon + \mu & 0 & 0 & -\frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} & 0 \\ \varepsilon & \lambda + \mu + p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \gamma + \mu & \frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \lambda + \theta + \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta & \lambda + \delta + \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \delta + \mu) \begin{vmatrix} \lambda + \varepsilon + \mu & 0 & 0 & -\frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} \\ 0 & \lambda + \mu + p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \gamma + \mu & \frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} \\ 0 & 0 & \gamma & \lambda + \theta + \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \delta + \mu)(\lambda + \mu + p) \begin{vmatrix} \lambda + \varepsilon + \mu & 0 & -\frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} \\ 0 & \lambda + \gamma + \mu & \frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} \\ 0 & \gamma & \lambda + \theta + \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \delta + \mu)(\lambda + \mu + p)(\lambda + \varepsilon + \mu) \begin{vmatrix} \lambda + \gamma + \mu & \frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} \\ \gamma & \lambda + \theta + \mu \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \delta + \mu)(\lambda + \mu + p)(\lambda + \varepsilon + \mu)(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \theta + \mu) - (\gamma) \left(\frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} \right) = 0 \quad (10)$$

Dari Persamaan (10) diperoleh:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu \\ \lambda_2 &= -\delta - \mu \\ \lambda_3 &= -p - \mu \\ \lambda_4 &= -\varepsilon - \mu \end{aligned}$$

Karena nilai parameter $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \delta, \varepsilon, p, \mu > 0$ maka nilai eigen pada titik kesetimbangan bebas penyakit yakni $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \text{ dan } \lambda_4 < 0$.

Dari Persamaan (10) dapat dilihat bahwa Persamaan karakteristik untuk kedua nilai eigen lainnya sebagai berikut

$$\begin{aligned} (\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \theta + \mu) - (\gamma) \left(\frac{\beta\alpha}{\varepsilon + \mu} \right) &= 0 \\ \lambda^2 + (\theta + \gamma + 2\mu)\lambda + (\gamma + \mu)(\theta + \mu) - \frac{\beta\alpha\gamma}{\varepsilon + \mu} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Persamaan (11) dapat diubah menjadi bentuk berikut ini:

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

dengan:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \theta + \gamma + 2\mu$$

$$a_2 = (\gamma + \mu)(\theta + \mu) - \frac{\beta\alpha\gamma}{\varepsilon + \mu}$$

Untuk mengetahui tanda bagian real nilai eigen lainnya, akan digunakan Kriteria Routh-Hurwitz. Syarat Kriteria Routh-Hurwitz adalah determinan matriks Routh-Hurwitz Persamaan (11) bernilai positif dan semua nilai eigen (11) akan

bernilai negatif jika $\Delta_1 > 0$ dan $\Delta_2 > 0$. Didefinisikan matriks Routh-Hurwitz sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta + \gamma + 2\mu & 1 \\ 0 & (\gamma + \mu)(\theta + \mu) - \frac{\beta\alpha\gamma}{\varepsilon + \mu} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks H , diperoleh determinan matriks Routh-Hurwitz sebagai berikut:

$$\Delta_1 = [a_1]; \Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} = a_1a_2 - a_3a_0 = a_1a_2$$

Akan ditunjukkan bahwa $a_1 > 0$, perhatikan:

$$a_1 = \theta + \gamma + 2\mu$$

Diketahui bahwa $\theta > 0, \gamma > 0, \mu > 0$ maka jelas $a_1 > 0$, sehingga $\Delta_1 > 0$.

Selanjutnya untuk menunjukkan $\Delta_2 > 0$, diketahui bahwa $a_1 > 0$ maka untuk $\Delta_2 = a_1a_2 > 0$, determinan matriks Routh-Hurwitz Δ_2 bernilai positif jika $a_2 > 0$, perhatikan:

$$\begin{aligned} (\gamma + \mu)(\theta + \mu) - \frac{\beta\alpha\gamma}{\varepsilon + \mu} &> 0 \\ (\gamma + \mu)(\theta + \mu) - \frac{\beta\alpha\gamma}{\varepsilon + \mu} &> 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$1 > \frac{\beta\alpha\gamma}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)(\varepsilon + \mu)}$$

atau

$$\frac{\beta\alpha\gamma}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)(\varepsilon + \mu)} < 1$$

Dengan demikian Persamaan (11) mempunyai akar-akar yang bagian realnya negatif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit E_1 stabil asimtotik jika $R_0 < 1$.

4.3 Simulasi Numerik

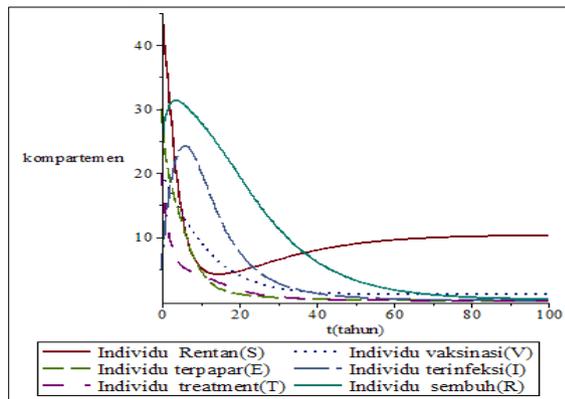
Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan Software Maple 13 dengan nilai parameter terdapat pada Tabel 1.

Tabel 1. Daftarnilai parameter

No	Parameter	Nilai	Satuan
1	α	0.93	$\frac{\text{individu}}{\text{tahun}}$
2	μ	0.08	$\frac{1}{\text{tahun}}$
3	β	0.01	$\frac{1}{\text{individu} \times \text{tahun}}$
4	γ	0.35	$\frac{1}{\text{tahun}}$
5	ε	0.01	$\frac{1}{\text{tahun}}$
6	θ	0.75	$\frac{1}{\text{tahun}}$
7	p	0.01	$\frac{1}{\text{tahun}}$
8	δ	0.35	$\frac{1}{\text{tahun}}$

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 1 diperoleh bilangan reproduksi dasar dari Sistem (1)

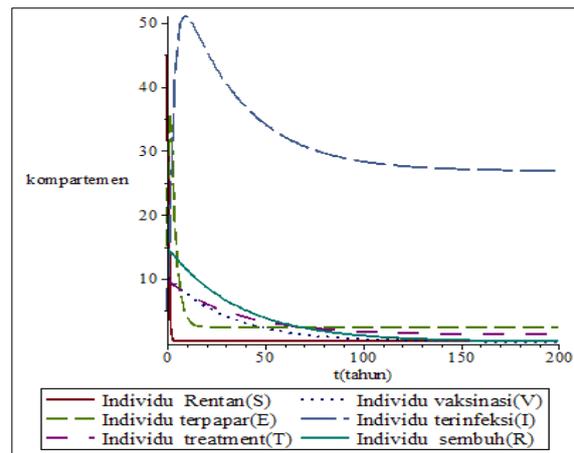
adalah $R_0 = 0.5426356590$. Hasil simulasinya adalah sebagai berikut:



Gambar 4.1 Grafik Menuju Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit Saat ($R_0 < 1$)

Pada **Gambar 4.1** menunjukkan bahwa pada individu rentan mengalami penurunan, kemudian bergerak naik di titik 10 dan stabil dititik tersebut. Pada individu vaksinasi akan mengalami penurunan dan stabil di titik 1.15. Pada individu terpapar terjadi penurunan hingga menuju titik 0. Kemudian pada individu terinfeksi mengalami peningkatan, kemudian mengalami penurunan hingga mencapai di titik 0. Pada individu *treatment* mengalami penurunan hingga mencapai titik 0. Sedangkan pada individu sehat mengalami peningkatan yang di akibatkan oleh adanya vaksinasi dan pengobatan, kemudian mengalami penurunan hingga mencapai titik 0 karena adanya kematian alami yang terjadi. Untuk kondisi $R_0 < 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik, ini menunjukkan bahwa setelah jangka waktu tertentu populasi yang terinfeksi akan semakin mengecil atau sistem akan lebih cepat terbebas dari penyakit.

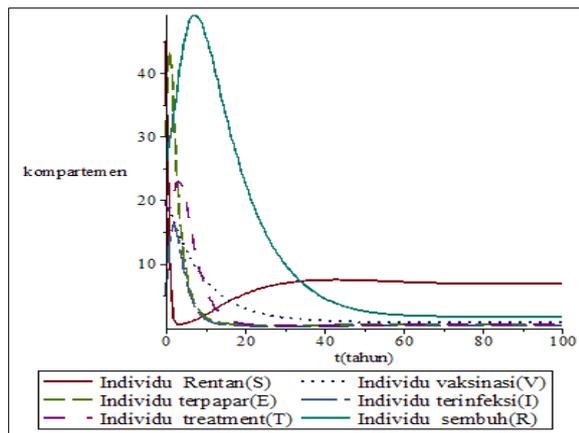
Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik titik kesetimbangan bebas penyakit untuk $R_0 > 1$. jika nilai parameter pada **Tabel 1** diperkecil yaitu $\mu = 0.03, \beta = 0.1, \theta = 0.0015, p = 0.001, \text{ dan } \delta = 0.0035$, sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar dari Sistem (1) adalah $R_0 = 67.98245613$. Hasil simulasinya adalah sebagai berikut:



Gambar 4.2 Grafik Menuju Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit Saat ($R_0 > 1$)

Pada **Gambar 4.2** menunjukkan bahwa dilihat pada individu rentan mengalami penurunan drastis, kemudian bergerak naik di titik 0.34 dan stabil dititik tersebut. Pada individu vaksinasi akan mengalami penurunan dan stabil di titik 0.13. Pada individu terpapar terjadi penurunan dan stabil di titik 2.41. Kemudian pada individu terinfeksi mengalami peningkatan, kemudian bergerak turun hingga mencapai di titik 26.9 dan stabil dititik tersebut. Pada individu *treatment* mengalami penurunan hingga mencapai titik 1.24 dan stabil dititik tersebut. Sedangkan pada individu sehat mengalami penurunan hingga mencapai titik 0.13 dan stabil dititik tersebut. Untuk kondisi $R_0 > 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat spiral, ini menunjukkan bahwa sistem masih belum terbebas dari penyakit dan masih terdapat penyakit yang mendominasi populasi tersebut.

Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik titik kesetimbangan endemik. jika nilai parameter diperkecil pada **Tabel 1** yaitu $\mu = 0.0911, \text{ dan } \gamma = 0.4$ sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar dari sistem (4.1) adalah $R_0 = 1$. Hasil simulasinya adalah sebagai berikut:



Gambar 4.3 Grafik Model SVEITR Pada Laju Perubahan Titik Kesetimbangan Endemik

Pada **Gambar 4.3** pada individu rentan mengalami penurunan, kemudian bergerak naik di titik 7.7 dan stabil di titik tersebut. Pada individu vaksinasi akan mengalami penurunan dan stabil di titik 0.6. Pada individu terpapar terjadi penurunan hingga menuju titik 0. Kemudian pada individu terinfeksi mengalami peningkatan, kemudian mengalami penurunan hingga mencapai di titik 0. Pada individu *treatment* bergerak naik kemudian penurunan hingga mencapai titik 0. Sedangkan pada individu sehat mengalami peningkatan yang diakibatkan oleh adanya vaksinasi dan pengobatan, kemudian mengalami penurunan hingga mencapai titik 0. Untuk kondisi $R_0 = 1$ titik kesetimbangan endemik bersifat spiral stabil.

5. Penutup

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan di atas, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Diperoleh model SVEITR pada penyebaran penyakit tuberculosis dengan faktor vaksinasi dan treatment

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \beta SI - (\varepsilon + \mu)S$$

$$\frac{dV}{dt} = \varepsilon S - (p + \mu)V$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\gamma + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - (\theta + \mu)I$$

$$\frac{dT}{dt} = \theta I - (\delta + \mu)T$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta T + pV - \mu R$$

2. Terdapat dua titik kesetimbangan yang diperoleh dari model SVEITR pada penyebaran penyakit tuberculosis yaitu

- a. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

$$E_1 = (S, V, EI, T, R)$$

Dengan nilai

$$S = \left(\frac{\alpha}{\varepsilon + \mu} \right)$$

$$V = \frac{\varepsilon \alpha}{(\varepsilon + \mu)(p + \mu)}$$

$$E = 0$$

$$I = 0$$

$$T = 0$$

$$R = \frac{p\varepsilon\alpha}{(\varepsilon + \mu)(p + \mu)\mu}$$

- b. Titik Kesetimbangan Endemik

$$E_2 = (S^*, V^*, E^*, I^*, T^*, R^*)$$

Dengan nilai

$$S^* = \frac{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}{\beta\gamma}$$

$$V^* = \frac{\varepsilon(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}{(p + \mu)\beta\gamma}$$

$$E^* = \frac{\alpha\beta\gamma - (\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}{\beta\gamma(\gamma + \mu)}$$

$$I^* = \frac{\alpha\beta\gamma - (\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}{\beta(\theta + \mu)(\gamma + \mu)}$$

$$T^* = \frac{\theta(\alpha\beta\gamma - (\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \mu))}{\beta(\theta + \mu)(\gamma + \mu)(\delta + \mu)}$$

$$R^* = \frac{\delta(\alpha\beta\gamma\theta - (\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \mu)\theta)}{\beta\mu(\theta + \mu)(\gamma + \mu)(\delta + \mu) + \frac{p(\varepsilon(\gamma + \mu)(\theta + \mu))}{(p + \mu)\beta\gamma\mu}}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik saat $R_0 < 1$, dengan $R_0 = \frac{\beta\alpha\gamma}{(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \mu)}$, menunjukkan penyakit akan menghilang dalam jangka waktu tertentu. Apabila $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil (spiral) dan titik kesetimbangan endemik akan bersifat spiral stabil.

5.2 Saran

Adapun saran yang dapat disampaikan adalah pada penelitian ini telah dibuat model SVEITR pada penyebaran penyakit tuberculosis dengan faktor vaksinasi dan treatment. Model ini dapat dikembangkan lagi mengingat model yang digunakan tidak membedakan umur manusia.

Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini dapat dilaksanakan dengan lancar berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, untuk itu peneliti mengucapkan terima kasih kepada Civitas Akademika Universitas Halu Oleo, Dosen Pembimbing, Tim Penguji dan pihak-pihak lain yang telah memfasilitasi dan membantu berjalannya penelitian ini.

Daftar pustaka

- [1] T. Sjahriani, dan N. Sari .(2018). Hubungan Antara Pemberian Vaksinasi BCG dengan

- Kejadian Tuberkulosis pada Anak di RSUD
Dr. H. Abdul Moeloek. *Jurnal Dunia Kesmas*,
7(4), 204-211.
- Diterima tgl. 19 September 2024
Direvisi tgl. 7 Desember 2024
Disetujui untuk terbit tgl. 15 Desember 2024
- [2] T. D. Kristina, dan R. Hamidah. (2020).
Potensi Penularan Tuberculosis Paru pada
Anggota Keluarga Penderita. *Jurnal
Kesehatan Masyarakat Indonesia*, 15(1), 24-
28.
- [3] Meliasari. (2021). Terapi Tuberkulosis. *Jurnal
Medika Hutana*, 3(1), 1571-1575.
- [4] W. Wulandari, Darmawijoyo, dan Y. Hartono.
(2016). Pengaruh Pendekatan Matematika
Terhadap Kemampuan Argumentasi Siswa
Kelas VIII SMP Negeri 15 Palembang. *Jurnal
Pendidikan Matematika*, 10(1), 111-123
- [5] A. F. Wulanda, dan S. Delilah. (2021).
Efektivitas Imunisasi BCG terhadap Kejadian
Tuberkulosis Anak di Kabupaten Bangka.
*Jurnal Kesehatan Poltekkes KEMENKES RI
Pangkalpinang*, 9(1), 37-41.
- [6] T. A. Fortuna, H. Rachmawati, D. HASmono,
dan H. Karuniawati. (2022). Studi Penggunaan
Obat Anti Tuberkulosis (AOT) Tahap Lanjut
Pada Pasien Baru BTA Positif. *Jurnal Farmasi
Indonesia*, 19(1), 62-71.
- [7] E. Jumiati, dan I. Husein. (2018). Model of
Spread Content Disease For Association of
Vaccine. *Jurnal Matematika dan Terapan*,
4(2), 23-33.
- [8] A. Huppert, dan G. Katriel. (2013).
Matemactical Modelling and Prediction in
Infectious Disease Epidemiology. *Clinical
Microbiology and Infection*, 19(11), 999-
1005.
- [9] R. Syam, S. Side, dan C.S. Said. (2020).
Model SEIRS Penyebaran Penyakit
Tuberkulosis di Kota Makassar. *Journal of
Mathematics, Computations, and Statistics*,
3(1), 11-19.
- [10] S. Side, W. Sanusi, dan N.F. Setiawan. (2016).
Analisis dan Simulasi Model SITR pada
Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota
Makassar. *Jurnall Sainsmat*, 5(2), 191-204.