Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 801 - 812, September - Desember 2024
ISSN: 2503 – 2984

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI LOG-NORMAL BERDASARKAN SAMPEL TERSENSOR TIPE II

Helena Hasti
[1)]Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia.
Email: helenahasti.k24@gmail.com

Wayan Somayasa [1,a)] dan **Norma Muhtar** [1,b)]
[1)]Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo, Kendari, Indonesia.
Email:[a)] wayan.somayasa@uho.ac.id, dan [b)]norma.muhtar@uho.ac.id

ABSTRAK

Analisis uji hidup distribusi Log-Normal pada sampel tersensor tipe II merupakan studi statistik yang bertujuan untuk memahami perilaku *survival* dari suatu populasi atau sampel data yang mengikuti distribusi Log-Normal, di mana data tersebut mengalami sensoring tipe II. Analisis tahan hidup adalah salah satu prosedur statistik untuk melakukan analisa data berupa waktu tahan hidup dan variabel yang mempengaruhinya. Tujuan penelitian ini adalah menentukan estimasi parameter distribusi Log-Normal berdasarkan sampel tersensor tipe II dan menentukan selang kepercayaan parameter populasi berdistribusi Log-Normal berdasarkan sampel tersensor tipe II. Adapun metode yang digunakan adalah metode *maximum likelihood estimation* (MLE) dan diperoleh penyelesaian yang nonlinier, sehingga dilanjutkan dengan metode Newton-Raphson untuk memperoleh penyelesaiannya. Dengan menggunakan *software* R untuk sampel tersensor tipe II pada data waktu hidup tikus diperoleh $\hat{\mu} = 1{,}5720$ dan $\hat{\sigma}^2 = 0{,}9497$.

Kata Kunci: Analisis uji hidup, Penyensoran Tipe II, Distribusi Log-Normal, Maximum Likelihood Estimation (MLE), Newton-Raphson, software R

ABSTRACT

Survival analysis of Log-Normal distribution on Type II censored samples is a statistical study aimed at understanding the survival behavior of a population or sample data that follows a Log-Normal distribution, where the data is subject to Type II censoring. Survival analysis is a statistical procedure for analyzing data in terms of survival time and influencing variables. The purpose of this research is to determine the parameter estimation of the Log-Normal distribution based on Type II censored samples and to determine the confidence intervals of population parameters distributed according to the Log-Normal distribution based on Type II censored samples. The method used is the maximum likelihood estimation (MLE) method and a nonlinear solution is obtained, thus followed by the Newton-Raphson method to obtain its solution. By using R software for Type II censored samples on rat survival time data, we obtained $\hat{\mu} = 1{,}5720$ *and* $\hat{\sigma}^2 = 0{,}9497$.

Keywords: Survival analysis, Type II Censoring, Log-Normal Distribution, Maximum Likelihood Estimation (MLE), Newton-Raphson, R software.

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari banyak ditemui masalah yang berkaitan dengan waktu, misalnya kambuhnya suatu penyakit yang diderita seseorang. Jangka waktu sampai terjadinya suatu kejadian dalam statistika dikenal dengan istilah waktu tahan hidup. Analisis tahan hidup adalah salah satu prosedur statistik untuk melakukan analisa data berupa waktu tahan hidup dan variabel yang mempengaruhi waktu tahan hidup, yaitu data waktu tahan hidup mulai dari waktu awal penelitian yang sudah ditentukan sampai waktu terjadinya suatu kejadian (Sanusi dkk., 2019).

Analisis uji hidup memerlukan suatu distribusi guna mempresentasikan data tersebut, sehingga inferensi atau analisisnya dapat dilakukan secara parametrik. Salah satu distribusi yang dapat digunakan dalam analisis uji hidup yaitu distribusi Log-Normal. Pada pemodelan statistika, model distribusi peluang digunakan untuk memodelkan distribusi peluang populasi, oleh karena itu karakteristik suatu populasi dapat dipelajari dari parameter-parameter model distribusi peluang tersebut. Untuk dapat mengetahui karakteristik dari populasi, maka perlu dilakukan inferensi terhadap parameter populasi berdasarkan sampel yang diambil dari populasi tersebut melalui analisis data. Berdasarkan sampel tersebut, maka nilai parameter yang menjadi perhatian diestimasi dengan menggunakan statistik yang relevan yang diperoleh dengan menggunakan metode-metode tertentu. Estimasi parameter adalah pendugaan karakteristik populasi (parameter) dengan menggunakan karakteristik sampel (statistik) (Salaam dkk., 2023).

Salah satu metode yang umum digunakan untuk mengestimasi parameter adalah *maximum likelihood estimation* (MLE). MLE merupakan suatu metode pendugaan parameter yang memaksimalkan fungsi *likelihood*. Namun, di beberapa kasus model distribusi terdapat fungsi yang berbentuk nonlinier sehingga tidak bisa diselesaikan secara analitik, oleh karena itu untuk menyelesaikannya digunakan pendekatan secara numerik, seperti metode Newton-Rapshon (Purwanto dkk., 2023).

Kendala yang dihadapi peneliti ketika melakukan penelitian *survival* adalah terbatasnya waktu dan anggaran yang disediakan. Kedua kendala ini mengakibatkan adanya variabel penelitian yang tidak dapat diamati secara utuh, sehingga mengakibatkan adanya data yang tidak lengkap. Data tidak lengkap mengakibatkan perlunya pendekatan yang dilakukan peneliti dalam melakukan analisis data. Secara umum, data tidak lengkap dikelompokkan menjadi dua bagian yaitu data terpotong dan data tersensor. Data dikatakan terpotong jika objek penelitian telah mengalami kejadian (*event*) sebelum pengamatan mulai dilakukan. Sehingga objek tersebut tidak dijadikan sebagai bagian data penelitian. Selanjutnya, data dikatakan tersensor jika peneliti tidak mengetahui secara pasti waktu kejadian (*event*) dialami oleh sampel penelitian. Waktu kejadian ditentukan dengan perkiraan yang dilakukan oleh peneliti berdasarkan informasi yang diperoleh mengenai sampel penelitian (Nashar dkk., 2022).

Data waktu hidup yang diperoleh dari percobaan uji hidup dapat berbentuk data lengkap, data tersensor tipe I dan data tersensor tipe II. Berbentuk data lengkap jika semua benda dalam percobaan diuji sampai semuanya gagal, berbentuk data tersensor tipe I jika data waktu hidup dihasilkan setelah percobaan berjalan selama waktu yang ditentukan serta berbentuk data tersensor tipe II jika observasi diakhiri setelah sejumlah kematian atau kegagalan tertentu telah terjadi. Data tersensor tipe II adalah suatu data waktu kematian atau kegagalan yang hanya terdapat r buah observasi terkecil dalam sampel random yang berukuran n dengan $1 \leq r \leq n$ (Lawless, 1982). Kelemahan dari sensor tipe II ini waktu yang diperlukan untuk memperoleh r objek yang mati bisa jadi sangat panjang, tetapi pasti diperoleh data tahan hidup dari r objek tersebut. Berdasarkan pengalaman para statistikawan distribusi yang sering digunakan dalam menangani masalah uji tahan hidup adalah distribusi Gamma, Log-Normal, Eksponensial dan Weibull (Ni'mah dan Arief, 2014).

Ada berbagai keluarga parametrik dari model yang digunakan dalam analisis data uji hidup misalnya distribusi Log-Normal. Distribusi Log-Normal berguna dalam memodelkan variabel acak kontinu yang lebih besar dari atau sama dengan nol. Contoh-contoh skenario di mana distribusi Log-Normal digunakan antara lain: dalam bidang kedokteran, periode laten penyakit menular, dalam ilmu lingkungan seperti distribusi partikel, bahan kimia, dan organisme di lingkungan, di bidang ekonomi, usia perkawinan, luas lahan pertanian, dan pendapatan. Distribusi Log-Normal juga berguna dalam memodelkan data yang akan dianggap terdistribusi secara normal (Limpert, Stahel, and Abbt 2001). Memperkirakan parameter-parameter distribusi Log-Normal dengan tepat sangat penting untuk studi tentang subjek-subjek tersebut dan lainnya (Ginos, 2009).

Pada bagian kedua dibahas tentang konsep dasar analisis uji hidup yang berisi tentang fungsi survival dan fungsi hazard, konsep penyensoran, distribusi gamma, estimasi titik menggunakan metode maksimum likelihood, fungsi likelihood distribusi gamma, sifat asimptotik penduga, uji goodness of fit untuk sampel tersensor dan metode Newton-Rapshon. Selanjutnya pada bagian ketiga dibahas hasil penelitian meliputi prosedur estimasi parameter distribusi gamma berdasarkan sampel tersensor tipe II progresif. Paper diakhiri dengan penutup berisi kesimpulan dan saran.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Konsep Dasar Analisis Uji Hidup

Analisis *survival* merupakan suatu metode yang berkaitan dengan waktu, mulai dari *time origin* atau *start point* sampai dengan terjadinya suatu kejadian khusus *(failure event*/*end point*). Analisis *survival* memerlukan data yang merupakan waktu *survival*. Penentuan waktu *survival*, ada tiga faktor yang dibutuhkan yaitu: 1) awal pencatatan (*time origin* atau *start-point*) harus didefinisikan dengan tepat pada setiap individu, misalkan awal mula pengamatan berupa tanggal perawatan pasien, 2) akhir pencatatan (*failure time* atau *end-point*) didefinisikan jelas untuk mengetahui status tersensor atau tidak tersensor, meninggal atau sembuh seorang pasien, 3) skala pengukuran sebagai batas dari waktu kejadian dari awal sampai akhir kejadian, misalnya skala tahunan, bulanan, mingguan, harian (Sanusi dkk., 2019).

2.1.1 Fungsi *Survival* atau Fungsi Ketahanan

Definisi 2.1 (Harlan, 2017) Fungsi survival $S(t)$ yaitu probabilitas bahwa subjek *survive* lebih lama daripada waktu t atau probabilitas bahwa variabel random T melebihi waktu t :

Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 801 - 812, September - Desember 2024
ISSN: 2503 – 2984

$$S(t) = 1 - F(t) = P(T > t) \qquad (2.2)$$

Fungsi densitas $f(t)$ adalah turunan pertama $F(t)$ terhadap t, yaitu :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\{1 - S(t)\} = -S'(t) \qquad (2.3)$$

2.1.2 Fungsi *Hazard*

Definisi 2.2 (Collect, 1997) Fungsi *hazard* atau fungsi kegagalan, $h(t)$ dari variabel *lifetime* T adalah

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{t \le T \le t + \Delta t | T \ge t\}}{\Delta t} \qquad (2.4)$$

Menurut teori probabilitas, peluang bersyarat munculnya suatu kejadian A jika B terjadi adalah $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Dengan menggunakan definisi ini, probabilitas bersyarat dalam Persamaan diatas adalah

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{t \le T \le t + \Delta t\}}{\Delta t P\{T \ge t\}} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{T \le t + \Delta t\} - P\{T \le t\}}{\Delta t P\{T \ge t\}} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}\right) \frac{1}{S(t)} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh,

$$h(t) = F'(t) \frac{1}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} \qquad (2.5)$$

Berdasarkan Persamaan (2.3) maka berlaku,

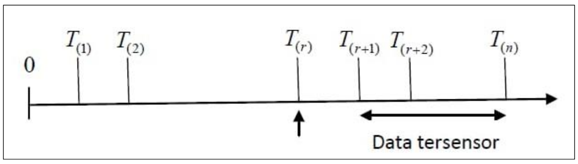
$$h(t) = \frac{-S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} ln\, S(t) \qquad (2.6)$$

2.2 Penyensoran

Data *survival* adalah data tentang pengamatan jangka waktu dari awal pengamatan sampai terjadinya sesuatu peristiwa. Ciri khas dari data *survival* adalah sering kali tidak dapat diamati secara lengkap (tersensor). Jika semua kejadian yang diharapkan terjadi, dan dapat diamati secara utuh maka beberapa metode analisis bisa dilakukan, namun data *survival* bersifat sensor (Clark TG, 2003). Aspek penting dalam analisis *survival* yakni kejadian dan penyensoran. Sensor terjadi apabila ada informasi waktu ketahaan individu yang menjadi subjek penelitian, meskipun tidak diketahui lama waktu ketahanan secara pasti (Tresnawanti dkk., 2018).

Adapun jenis penyensoran yang digunakan pada penelitian ini adalah penyensoran tipe II. Sensor tipe II merupakan tipe penyensoran dimana pengamatan uji hidup akan dihentikan jika telah tercapai kegagalan dalam jumlah tertentu. Sensor tipe II merupakan tipe penyensoran dimana sampel ke-r merupakan pengamatan terkecil dalam sampel acak berukuran n yang diamati $(1 \le r \le n)$. Dari total sampel berukuran n, pengamatan akan dihentikan ketika diperoleh sebanyak r individu yang mengalami kegagalan, dimana $r < n$. Sehingga dapat menghemat waktu dan biaya. Dalam penyensoran ini, r ditentukan terlebih dahulu sebelum data dikumpulkan.

Data terdiri dari r waktu hidup terkecil $T_{(1)} \le T_{(2)} \le \cdots \le T_{(r)}$ pada waktu hidup sampel acak n dimana $T_1, \ldots, T_2$ saling bebas dan berdistribusi identik serta kontinu dengan fungsi kepadatan peluang $f(t)$ dan fungsi *survival* $S(t)$. Ilustrasi sampel tersensor tipe II dapat dilihat pada gambar 2.2.



Gambar 2.2 Ilustrasi Model Sampel Tersensor Tipe II

Pdf bersama dari $T_{(1)}, \ldots, T_{(r)}$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} f\left(t_{(i)}\right) \left[S\left(t_{(r)}\right)\right]^{n-r} \qquad (2.7)$$

(Lawless, 1982)

2.3 Distribusi Log-Normal

Distribusi Log-Normal dalam bentuk sederhana adalah fungsi densitas dari sebuah peubah acak yang logaritmanya mengikuti hukum distribusi normal (Syafik, 2007). Menurut (Lawless, 1982) distribusi Log-Normal telah banyak digunakan sebagai model dalam berbagai aplikasi di bidang teknik, kedokteran dan lainnya. Misalkan T berdistribusi Log-Normal jika $Y = \ln T$ terdistribusi normal, dengan rata-rata μ, variansi σ^2dan pdf:

$$f(y; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, -\infty < y < \infty$$

Dari pdf dengan $T = \exp Y$ maka diperoleh :

$$f(t; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma t} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}, t > 0 \quad (2.8)$$

Rumus (2.9) diperoleh dari $y = \ln t$, maka $t = \exp y$ sehingga $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$. Maka

$$\begin{aligned} f(t; \mu, \sigma^2) &= f(y; \mu, \sigma^2)\left|\frac{dy}{dt}\right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma t} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

Fungsi *survivor* dan *hazard* untuk distribusi Log-Normal melibatkan fungsi distribusi normal standar

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{u^2/2} du$$

Fungsi *survivor* distribusi Log-Normal adalah

$$S(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$$

(Lawless, 1982)

Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 801 - 812, September - Desember 2024
ISSN: 2503 – 2984

Berdasarkan Persamaan (2.5) fungsi *hazard* pada distribusi Log-Normal yaitu

$$h(t) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\,\sigma t}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}}{1-\phi\left(\frac{\log t-\mu}{\sigma}\right)}$$

Dengan fungsi *hazard* kumulatifnya adalah

$$H(t) = -\ln\left[1-\phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

Berdasarkan Persamaan (2.1) maka diperoleh fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Log-Normal dengan parameter μ dan σ^2 adalah

$$F(t) = \phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)$$

2.4 Fungsi *Likelihood* untuk Distribusi Log-Normal

Fungsi kepadatan peluang dari distribusi Log-Normal adalah sebagai berikut:

$$f(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\,\sigma t}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\},\quad t>0$$

Berdasarkan persamaan (2.7), maka fungsi *likelihood* distribusi Log-Normal sampel tersensor tipe II adalah:

$$L(\mu,\sigma^2) = \frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\,t_{(i)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln t_{(i)}-\mu\right)^2\right\} \times\left[1-\phi\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)\right]^{n-r}$$

Sifat Asimptotik dari Penduga *Likelihood*

Teorema 2.1 (Nugraha, 2017) Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan sampel acak yang mempunyai fungsi kepadatan peluang $f(\boldsymbol{x_i};\theta_1,\theta_2)$. Misalkan diasumsikan bahwa $\hat\theta_1$ dan $\hat\theta_2$ merupakan penduga MLE dari θ_1 dan θ_2 yang berdimensi 2 dan bersifat konsisten. $\hat\theta_1$ dan $\hat\theta_2$ dikatakan secara asimtotik berdistribusi normal jika

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\hat\theta_1\\ \hat\theta_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{D} N_2\left(0,\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)$$

Dengan $\boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{\theta})$ adalah matriks informasi Fisher

$$\boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix}-\frac{\partial^2\ln L}{\partial\theta_1^2} & -\frac{\partial^2\ln L}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\\ -\frac{\partial^2\ln L}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & -\frac{\partial^2\ln L}{\partial\theta_2^2}\end{pmatrix}_{(\hat\theta_1,\hat\theta_2)}$$

sedangkan, matrks $\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ menyatakan

$$\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix}var(\theta_1) & cov(\theta_1,\theta_2)\\ cov(\theta_1,\theta_2) & var(\theta_2)\end{pmatrix}_{(\hat\theta_1,\hat\theta_2)}$$

(Purwanto dkk., 2023)

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\hat\theta_1\\ \hat\theta_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{D} N_2\left(0,\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n}\,\boldsymbol{I}_0^{1/2}(\boldsymbol{\theta})\left(\begin{pmatrix}\hat\theta_1\\ \hat\theta_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{D} N_2(0,\boldsymbol{I}_2)$$

$$\Leftrightarrow \left\|\sqrt{n}\,\boldsymbol{I}_0^{1/2}(\boldsymbol{\theta})\left(\begin{pmatrix}\hat\theta_1\\ \hat\theta_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}\right)\right\|^2\xrightarrow{D} \|N_2(0,\boldsymbol{I}_2)\|$$

dimana $\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ dan $\|\cdot\| = Norm$
karena $\|N_2(0,\boldsymbol{I}_2)\| \sim x^2(2)$, maka

$$\left\|\sqrt{n}\,\boldsymbol{I}_0^{1/2}(\boldsymbol{\theta})\left(\begin{pmatrix}\hat\theta_1\\ \hat\theta_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}\right)\right\|^2\xrightarrow{D} x^2(2)$$

Berdasarkan Teorema 2.1 untuk sembarang bilangan kecil $\alpha \in (0,1)$, maka berlaku

$$P\left\{\left\|\sqrt{n}\,\boldsymbol{I}_0^{1/2}(\boldsymbol{\theta})\left(\begin{pmatrix}\hat\theta_1\\ \hat\theta_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}\right)\right\|^2 \le k\right\}\approx 1-\alpha$$

Daerah kepercayaan asimptotik $(1-\alpha)\times 100\%$ untuk vektor $(\theta_1,\theta_2)^T$ adalah

$$\left\{(\theta_1,\theta_2)^T \mid n\left(\begin{pmatrix}\hat\theta_1\\ \hat\theta_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}\right)^T\boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{\theta})\left(\begin{pmatrix}\hat\theta_1\\ \hat\theta_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}\right)\le x^2_{1-\alpha}(2)\right\}$$

Selanjutnya, dengan menerapkan sifat asimtotik dari MLE akan ditentukan selang kepercayaan θ_1 dan θ_2 yang akan ditentukan menjadi $(\hat\theta_1,\hat\theta_2)$ menjadi distribusi normal bivariat dengan mean (θ_1,θ_2) dan covarian matriks $\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})$. Berdasarakan invers dari matriks informasi Fisher, maka selang kepercayaan untuk θ_1 dan θ_2 adalah:

1. Selang kepercayaan untuk parameter θ_1 berdasarkan Teorema 2.1

$$Z = \frac{\hat\theta_1-\theta_1}{\sqrt{\left(\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)_{11}}}$$

$$\Rightarrow P\left\{Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat\theta_1-\theta_1}{\sqrt{\left(\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)_{11}}} \le Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left\{\hat\theta_1 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)_{11}} \le \theta_1 \le \hat\theta_1 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)_{11}}\right\} = 1-\alpha$$

2. Selang kepercayaan parameter θ_2 berdasarkan Teorema 2.1

$$Z = \frac{\hat\theta_2-\theta_2}{\sqrt{\left(\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)_{22}}}$$

$$\Rightarrow P\left\{Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat\theta_2-\theta_2}{\sqrt{\left(\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)_{22}}} \le Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left\{\hat\theta_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)_{22}} \le \theta_2 \le \hat\theta_2 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{I}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)_{22}}\right\} = 1-\alpha$$

2.5 Uji *Goodness of Fit* untuk Sampel Tersensor

Menurut Swanepoel dan Graan (2002) uji *goodness of fit* dapat digambarkan sebagai metode yang digunakan untuk memeriksa seberapa cocok sampel data dengan distribusi tertentu sebagai populasinya. Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabel acak dari suatu populasi dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x) = P(X \leq x)$ yang tidak diketahui. Masalah utama yang diperhatikan pada uji ini adalah menguji hipotesis untuk $F(x)$ dengan format berikut (Swanepoel dan Graan, 2002).

$$H_0: F(x) = F_0(x) \qquad (2.11)$$

dengan $F_0(x)$ adalah keluarga model yang ditentukan. Biasanya $F(x)$ memuat parameter yang tidak diketahui, tetapi terkadang sudah ditentukan sebelumnya. Misalkan X adalah variabel acak distribusi kontinu dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ dan dengan hipotesis (2.11) bahwa $F(x) = F_0(x)$, di mana $F_0(x)$ adalah beberapa keluarga dari fungsi distribusi. Pertama-tama diperhatikan kasus di mana data tidak tersensor dan $F_0(x)$ ditentukan (tidak mengandung parameter yang tidak diketahui). Diberikan sampel acak $X_1, \dots, X_n$ dari distribusi untuk X. Fungsi $\tilde{F}_n(x)$ yang dimiliki sebagai

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{banyaknya\{x_i \leq x\}}{n}$$

adalah fungsi distribusi empiris dari sampel. Salah satu statistik uji yang digunakan untuk menguji H_0 dengan berdasar pada pengukuran “jarak” antara $\tilde{F}_n(x)$ dan $F_0(x)$ adalah statistik Kolmogorov-Smirnov sebagai berikut (Lawless,1982).

$$D_n^+ = \sup_x [\tilde{F}_n(x) - F_0(x)]$$

$$D_n^- = \sup_x [\tilde{F}_n(x) - F_0(x)]$$

$$D_n = \sup_x |\tilde{F}_n(x) - F_0(x)| = max\{D_n^+, D_n^-\}.$$

Menurut D’Agustino dan Stephens (1986) statistik fungsi distribusi empiris ini juga telah diadaptasi untuk bentuk penyensoran. Pada penelitian ini digunakan/dipertimbangkan kasus dimana distribusi yang diuji katakanlah $F(x)$ sepenuhnya ditentukan. Untuk penyensoran tipe 2, terdapat nilai r untuk Y_i, dengan $Y_{(r)}$ terbesar dan r tetap. Statistik Kolmogorov-Smirnov untuk penyensoran tipe II adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} {}_2D_{r,n} &= \sup_{0 \leq y \leq Y(r)} |Fn(y) - y| \\ &= \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{i}{n} - Y_{(i)}, Y_{(i)} - \frac{i-1}{n} \right\} \qquad (2.12) \end{aligned}$$

Adapun algoritma statistik Kolmogorov-Smirnov adalah sebagai berikut. Misalkan data mengalami penyensoran kanan, dengan H_0 berikut:

H_0:sampel tersensor $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(r)}$ berasal dari distribusi kontinu $F(x)$ yang spesifik.

dan $Y_{(i)} = F(X_{(i)}),\ i = 1, \dots, r$. Maka langkah yang dilakukan untuk menguji H_0 adalah sebegai berikut.

Untuk penyensoran tipe II:

1) Hitung ${}_2D_{r,n}$
2) Lihat Lampiran 4 dan tolak H_0 pada tingkat signifikansi α jika ${}_2D_{r,n}$ melebihi nilai tabulasi untuk α.

(Paeto dkk., 2022)

2.6 Metode Newton-Raphson

Menurut Batarius (2018) Metode Newton-Raphson, merupakan salah satu metode untuk menemukan aproksimasi akar suatu persamaan. Metode ini diimplementasikan dalam satu variable x: $f(x) = 0$. Metode ini dimulai dengan fungsi f yang didefinisikan sebagai bilangan real x, turunan fungsi f' dan tebakan awal x_0 untuk akar fungsi f. Jika fungsi memenuhi asumsi yang dibuat dalam turunan rumus dan tebakan awal yang dekat dengan akar sebenarnya, maka pendekatan x_1 diformulasikan:

$$x_i = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Secara geometris, $(x_1, 0)$ adalah perpotongan sumbu x dan garis singgung dari grafik f pada $(x_0, f\,(x_0))$. Proses ini diulang-ulang sampai prosesnya cukup akurat, sehingga secara umum persamaan metode Newton-Raphson diformulasikan sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Algoritma metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut.

a. Mendefinisikan $f(x)$ dan $f'(x)$
b. Menentukan toleransi *error* (e) dan iterasi maksimum (n)
c. Menentukan nilai pendekatan awal x_0
d. Menghitung $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$
e. Untuk iterasi $r = 1, \dots, n$ berlaku $x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$
f. Akar persamaanya adalah nilai x_{r+1} terakhir yang diperoleh
g. Iterasi berhenti jika $|x_{r+1} - x_r| \leq e$

(Paeto dkk., 2022)

Menurut Aitkinson (1989), apabila variabel atau parameternya berdimensi tinggi, maka turunan pertamanya termuat dalam vektor dan turunan keduanya termuat dalam matriks Hessian. Sehingga metode Newton-Raphson multivariabel menjadi

$$\boldsymbol{x}_{(r+1)} \approx \boldsymbol{x}_{(r)} - \left[\left(H(\boldsymbol{x}_{(r)}) \right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{(r)}) \right]$$

Dimana

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln L}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{dihitung pada titik } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{(r)}$$

$$H(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 \ln L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial x_1 x_n}\\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial x_2 x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial x_n^2}\end{bmatrix} \text{ dihitung pada titik } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{(r)}$$

Algoritma metode Newton-Raphson multivariabel yaitu:

a. Menentukan nilai awal $\boldsymbol{x}_{(r)}$, batas toleransi kesalahan $(\varepsilon > 0)$ dan iterasi maksimum (n)
b. Menghitung $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{(r)})$, $H(\boldsymbol{x}_{(r)})$ dan $\left(H(\boldsymbol{x}_{(r)})\right)^{-1}$
c. Untuk iterasi $i = 1,2,\dots,n$ atau jika $\|\boldsymbol{x}_{(r+1)} - \boldsymbol{x}_{(r)}\| > \varepsilon$, dengan menghhitung persamaan $\boldsymbol{x}_{(r+1)} \approx \boldsymbol{x}_{(r)} - \left[\left(H(\boldsymbol{x}_{(r)})\right)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{(r)})\right]$
d. Iterasi berhenti jika $\|\boldsymbol{x}_{(r+1)} - \boldsymbol{x}_{(r)}\| \le \varepsilon$
e. Nilai penduga yang diperoleh adalah nilai x terakhir

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 MLE Distribusi Log-Normal Berdasarkan Sampel Tersensor Tipe II

Pada bagian ini akan dilakukan estimasi *likelihood* maksimum dari distribusi Log-Normal dengan parameter μ dan σ^2 berdasarkan sampel tersensor tipe II. Adapun langkah-langkah mengestimasi parameter dengan metode maksimum *likelihood* dapat dilihat pada halaman 20 dengan langkah-langkah yaitu sebagai berikut:

1. Menentukan fungsi *likelihood* distribusi Log-Normal berdasarkan sampel tersensor tipe II dengan $f(t)$ dan $S(t)$ dari distribusi Log-Normal yaitu:

$$f(t)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma t}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

$$S(t)=1-\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)$$

Berdasarkan Persamaan (2.8) diperoleh fungsi *likelihood* distribusi Log-Normal berdasarkan sampel tersensor tipe II adalah sebagai berikut:

$$L(t_{(1)},\dots,t_{(r)};\mu,\sigma^2)=\frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r} f(t_{(i)})\,[S(t_{(r)})]^{n-r}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}t_{(i)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln t_{(i)}-\mu)^2\right\}\times\left[1-\Phi\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)\right]^{n-r}$$

2. Selanjutnya, mencari fungsi $\ln L(\mu,\sigma^2)$ yaitu,

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=\ln\frac{n!}{(n-r)!}-\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\sum_{i=1}^{r}\ln t_{(i)}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}(\ln t_{(i)}-\mu)^2+(n-r)\ln\left[1-\Phi\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

3. Kemudian mencari penduga *likelihood* maksimum untuk μ dan σ^2 diperoleh dari penyelesaian

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=0 \text{ dan } \frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=0$$

Untuk mencari nilai μ maka diperlukan turunan pertama fungsi $\ln L(\mu,\sigma^2)$ terhadap μ sama dengan nol, sehingga

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}(\ln t_{(i)}-\mu)+\frac{(n-r)}{S(t_{(r)})}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}=0 \qquad (4.1)$$

Selanjutnya, akan dicari turunan pertama fungsi $\ln L(\mu,\sigma^2)$ terhadap σ^2 sama dengan nol, sehingga

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2\pi\sigma^4}\sum_{i=1}^{r}(\ln t_{(i)}-\mu)^2+\frac{(n-r)}{S(t_{(r)})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\left(\frac{1}{2(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}(\ln t_{(r)}-\mu)\right)=0 \quad (4.2)$$

4. Persamaan (4.1) dan (4.2) untuk μ dan σ^2 tidak dapat diselesaikan secara analitik oleh karena itu diterapkan metode numerik menggunakan iterasi Newton-Raphson.

Langkah selanjutnya mencari turunan kedua terhadap μ dan σ^2. Maka turunan kedua $\ln L(\mu,\sigma^2)$ terhadap μ adalah:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu^2}=\frac{r}{\sigma^2}+\frac{(n-r)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\times\left(\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln t_{(r)}-\mu)^2\right\}\times\frac{1}{\sigma^2}(\ln t_{(r)}-\mu)\,S(t_{(r)})-\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln t_{(r)}-\mu)^2\right\}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right)\times\frac{1}{\left(S(t_{(r)})\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2\partial\mu}=-\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{r}(\ln t_{(i)}-\mu)+(n-r)$$

Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 801 - 812, September - Desember 2024
ISSN: 2503 – 2984

$$\times\left[\left(-\frac{1}{2\sqrt{2\pi(\sigma^2)^3}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right.\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^2\right\}$$

$$\left.\times\frac{1}{2\sigma^4}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^2\right)S\left(t_{(r)}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{1}{2(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)\right)\right]\frac{1}{\left(S\left(t_{(r)}\right)\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu\partial\sigma^2}=\frac{1}{2\pi\sigma^4}\sum_{i=1}^{r}2\ln t_{(i)}+\frac{r\mu}{\pi\sigma^4}$$

$$+\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^2\right\}\right)\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{2(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)\right)$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^2\right\}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{2(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)\right)$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{2(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)\right)$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right)\right)\right]$$

$$\frac{1}{\left(S\left(t_{(r)}\right)\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial(\sigma^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{r}{\sigma^4}-\frac{1}{\pi\sigma^6}\sum_{i=1}^{r}\left(\ln t_{(i)}-\mu\right)^2$$

$$+(n-r)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\times\left[\left(\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^2\right\}\right.\right.$$

$$\times\frac{1}{4\sigma^7}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^3$$

$$-\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^2\right\}$$

$$\left.\times\frac{3}{4(\sigma^2)^{\frac{5}{2}}}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)\right)S\left(t_{(r)}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{1}{2(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)\right)\right)^2\right]\frac{1}{\left(S\left(t_{(r)}\right)\right)^2}$$

Solusi untuk μ dan σ^2 dengan Metode Newton-Raphson menjadi:

$$\begin{bmatrix}\hat{\mu}_{(r+1)}\\ \hat{\sigma}^2_{(r+1)}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}\hat{\mu}_{(r)}\\ \hat{\sigma}^2_{(r)}\end{bmatrix}-\left(H\left(\hat{\mu}_{(r)},\hat{\sigma}^2_{(r)}\right)\right)^{-1}\boldsymbol{f}\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{(r)},\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2_{(r)}\right)$$

Dimana

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}\\ \dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}\end{bmatrix}\text{ dihitung pada titik }\mu=\hat{\mu}_{(r)}\text{ dan }\sigma^2=\hat{\sigma}^2_{(r)}$$

$$H(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu^2} & \dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu\partial\sigma^2}\\ \dfrac{\partial^2\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2\partial\mu} & \dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial(\sigma^2)^2}\end{bmatrix}\text{ dihitung pada titik }\mu=\hat{\mu}_{(r)}\text{ dan }\sigma^2=\hat{\sigma}^2_{(r)}$$

3.2 Selang Kepercayaan Parameter Distribusi Log-Normal

Pada bagian ini akan ditentukan bagaimana selang kepercayaan parameter distribusi Log-Normal dengan menggunakan penerapan sifat asimptotik dari MLE. Selanjutnya, akan ditentukan aproksimasi terhadap selang kepercayaan untuk μ dan σ^2 yang akan ditentukan berdasarkan fakta bahwa $(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)$ berdistribusi normal bivariat dengan mean (μ,σ^2) dan covarian matriks $\boldsymbol{I}_0^{-1}$. Berdasarkan Teorema (2.1) maka berlaku:

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\hat{\mu}\\ \hat{\sigma}^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu\\ \sigma^2\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{D}N_2\left(0,\boldsymbol{I}_0^{-1}\right)$$

Dengan $\boldsymbol{I}_0$ adalah matriks informasi Fisher, yaitu

$$\boldsymbol{I}_0=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial^2\ln L}{\partial\mu^2} & -\dfrac{\partial^2\ln L}{\partial\mu\partial\sigma^2}\\ -\dfrac{\partial^2\ln L}{\partial\sigma^2\partial\mu} & -\dfrac{\partial^2\ln L}{\partial(\sigma^2)^2}\end{pmatrix}_{(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)}$$

Maka matriks informasi Fisher dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu^2} = \frac{r}{\sigma^2} + \frac{(n-r)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \left(\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^2\right\} \times \frac{1}{\sigma^2}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right) S\left(t_{(r)}\right) - \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^2\right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right) \times \frac{1}{\left(S\left(t_{(r)}\right)\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{r}{\sigma^4} - \frac{1}{\pi\sigma^6}\sum_{i=1}^{r}\left(\ln t_{(i)}-\mu\right)^2 + (n-r)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \left[\left(\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^2\right\} \times \frac{1}{4\sigma^7}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^3 - \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^2\right\} \times \frac{3}{4(\sigma^2)^{\frac{5}{2}}}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)\right) S\left(t_{(r)}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \times \left(\frac{1}{2(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)\right)\right)^2\right] \frac{1}{\left(S\left(t_{(r)}\right)\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2\partial\mu} = -\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{r}\left(\ln t_{(i)}-\mu\right) + (n-r) \times \left[\left(-\frac{1}{2\sqrt{2\pi(\sigma^2)^3}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^2\right\} \times \frac{1}{2\sigma^4}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)^2\right) S\left(t_{(r)}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \times \frac{1}{2(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\ln t_{(r)}-\mu\right)\right)\right] \frac{1}{\left(S\left(t_{(r)}\right)\right)^2}$$

Daerah kepercayaan asimptotik $(1-\alpha)\times 100\%$ untuk vektor $(\mu,\sigma^2)^T$ adalah

$$\left\{(\mu,\sigma^2)^T \,\middle|\, n\left(\begin{pmatrix}\hat{\mu}\\ \hat{\sigma}^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mu\\ \sigma^2\end{pmatrix}\right)^T \boldsymbol{I}_0\left(\begin{pmatrix}\hat{\mu}\\ \hat{\sigma}^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mu\\ \sigma^2\end{pmatrix}\right) \le x^2_{1-\alpha}(2)\right\}$$

Berdasarkan invers dari matriks informasi Fisher, maka selang kepercayaan untuk μ dan σ^2 adalah:

1. Selang kepercayaan untuk parameter μ berdasarkan Teorema 2.1

$$Z = \frac{\hat{\mu} - E(\hat{\mu})}{\sqrt{var(\hat{\mu})}}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{11}}}$$

$$\Rightarrow P\left\{Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{11}}} \le Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left\{\hat{\mu} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{11}} \le \mu \le \hat{\mu} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{11}}\right\} = 1-\alpha \quad (4.3)$$

2. Selang kepercayaan parameter σ^2 berdasarkan Teorema 2.1

$$Z = \frac{\hat{\sigma}^2 - E(\hat{\sigma}^2)}{\sqrt{var(\hat{\sigma}^2)}}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{22}}}$$

$$\Rightarrow P\left\{Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{22}}} \le Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left\{\hat{\sigma}^2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{22}} \le \sigma^2 \le \hat{\sigma}^2 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{22}}\right\} = 1-\alpha \quad (4.4)$$

3.3 Analisis Data

Pada bagian ini akan dikaji penerapan dari metode estimasi parameter distribusi Log-Normal menggunakan metode maksimum *likelihood* dan selang kepercayaan dari parameter berdistribusi Log-Normal berdasarkan sampel tersensor tipe II terhadap data.

Misalkan akan dilakukan pengamatan terhadap 30 ekor tikus yang ditempatkan didalam sel

Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 801 - 812, September - Desember 2024
ISSN: 2503 – 2984

isolasi kemudian disuntikkan dengan antibodi untuk mempelajari respon imun sampai terjadinya suatu kejadian yaitu kematian pada tikus. Dari 30 ekor tikus pengamatan akan dihentikan setelah diperoleh 20 ekor tikus yang mati dari 30 tikus yang diamati. Maka sampel yang diperoleh adalah sampel terurut $T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T_{20}$.

Waktu $T_1, T_2, \ldots, T_{20}$ (dalam bulan) merupakan waktu hidup tikus yang diperoleh dari penyensoran. Diasumsikan data waktu hidup tikus adalah sebagai berikut:

Tabel 4.1 Data Asumsi Waktu Hidup Tikus (Sumber data: *Software* R pada Lampiran 1)

Item ke-	Waktu t (bulan)	Item ke-	Waktu t (bulan)
1	1,3775	11	2,3123
2	1,5175	12	2,7980
3	1,6374	13	2,8266
4	1,9216	14	2,8863
5	1,9451	15	3,1976
6	2,2027	16	3,3350
7	2,2215	17	3,7396
8	2,2865	18	3,9006
9	2,3158	19	3,9469
10	2,5728	20	4,3082

Sebelum dilakukan penerapan dari metode estimasi parameter distribusi Log-Normal terlebih dahulu dilakukan pengecekkan terhadap data yang digunakan berasal dari populasi distribusi Log-Normal atau tidak. Untuk mengetahui bahwa data berdistribusi Log-Normal, maka akan dilakukan uji *goodness of fit* dimana statistik yang digunakan adalah statistik uji Kolmogorov-Smirnov. Misalkan T berdistribusi Log-Normal maka $Y = \ln T$ terdistribusi normal. Sehingga data pada Tabel 4.1 jika dilogaritmakan akan berdistribusi normal.

Tabel 4. 2 Menghitung Nilai Statistik Uji dari ${}_2D_{r,n}$

i	t	$\frac{i}{r}$	$\frac{i-1}{r}$	Y_i	$\frac{i}{r} - Y_i$	$(Y_i) - (\frac{i-1}{r})$
1	0,3823	0,05	0	0,00004	0,0499	0,00004
2	0,3886	0,1	0,05	0,0004	0,0995	-0,0495
3	0,4915	0,15	0,1	0,0019	0,1480	-0,0980
4	0,6075	0,2	0,15	0,0266	0,173	-0,1233
5	0,6176	0,25	0,2	0,0314	0,2185	-0,1685
6	0,6619	0,3	0,25	0,1311	0,1688	-0,1188
7	0,6737	0,35	0,3	0,1421	0,2078	-0,1578
8	0,7429	0,4	0,35	0,1842	0,2157	-0,1657
9	0,7546	0,45	0,4	0,2050	0,2449	-0,1949
10	0,8370	0,5	0,45	0,4213	0,0786	-0,0286
11	0,8382	0,55	0,5	0,4347	0,1152	-0,0652
12	1,0289	0,6	0,55	0,5085	0,0914	-0,0414
13	1,0390	0,65	0,6	0,5248	0,1251	-0,0751
14	1,0599	0,7	0,65	0,5460	0,1539	-0,1039
15	1,1624	0,75	0,7	0,8669	-0,1169	0,1669
16	1,2044	0,8	0,75	0,9695	-0,1695	0,2195
17	1,3189	0,85	0,8	0,9948	-0,1448	0,1948
18	1,3611	0,9	0,85	0,9975	-0,0975	0,14756
19	1,3729	0,95	0,9	0,9981	-0,0481	0,0981
20	1,4605	1	0,95	1	0	0,05

Algoritma melakukan uji *goodness of fit* dimana statistik yang digunakan adalah statistik uji Kolmogorov-Smirnov adalah sebagai berikut:

1. Menentukan hipotesis
   $H_0 : F(t) = F_0(t)$ (populasi berdistribusi normal)
   vs
   $H_1 : F(t) \neq F_0(t)$ (populasi tidak berdistribusi normal)

Dimana

$$F_0(t) = \phi\left(\frac{t_{(i)} - \mu}{\sigma}\right)$$

2. Menghitung nilai statistik uji ${}_2D_{r,n}$ di mana

$${}_2D_{r,n} = \sup_{-\infty \leq t \leq t_{(r)}} |F_n(t) - F_0(t)|$$

$$= \max_{1 \leq i \leq r} \left\{\frac{i}{n} - Y_i, Y_i - \frac{i-1}{n}\right\}$$

dengan $Y_i = F_0(t_{(i)}) = \phi\left(\frac{t_{(i)} - \mu}{\sigma}\right)$, dengan $\mu = 0{,}9784$ dan $\sigma^2 = 0{,}1683$

3. Kesimpulan

H_0 tidak ditolak pada tingkat signifikansi $\alpha = 0{,}05$, karena ${}_2D_{r,n} < D$ atau $0{,}2449 < 0{,}294$, artinya populasi berdistribusi Normal.

Berdasarkan data pada tabel 4.1 akan ditentukan penduga parameter μ dan σ^2 dari distribusi Log-Normal. Pendugaan ini dilakukan dengan metode *likelihood* maksimum tetapi penyelesaiannya tidak dapat diselesaikan secara analitik, maka penyelesaiannya dilakukan secara numerik menggunakan metode Newton-Raphson data tersensor tipe II distribusi Log-Normal menggunakan *software* R sesuai dengan algoritma metode Newton-Raphson multivariabel.

Adapun algoritma menentukan penduga parameter μ dan σ^2 dari distribusi Log-Normal dengan menggunakan iterasi Newton-Raphson adalah sebagai berikut:

1. Menentukan hampiran awal $\mu_0 = 1$ dan $\sigma_0^2 = 0{,}5$, dimana $n = 30$.
2. Menentukan nilai toleransi error $\varepsilon = 0{,}00001$ dan maksimum iterasi 100.
3. Menghitung nilai $f(\mu_0, \sigma_0^2)$, $H(\mu_0, \sigma_0^2)$ dan $H^{-1}(\mu_0, \sigma_0^2)$.
4. Menghitung hampiran berikutnya untuk $r = 1, 2, \ldots, n$ menggunakan persamaan $x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$
5. Iterasi akan berhenti jika nilai $\|\boldsymbol{x}_{(r+1)} - \boldsymbol{x}_{(r)}\| \leq \varepsilon$, dimana $x = (\mu, \sigma^2)$ nilai penduga untuk $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}^2$ adalah nilai x yamg terakhir diperoleh.

Algoritma diatas diselesaikan dengan menggunakan *software* R dapat dilihat pada Lampiran 3 sehingga diperoleh penduga parameter

Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika
Volume 4 Nomor 3, pp. 801 - 812, September - Desember 2024
ISSN: 2503 – 2984

untuk $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}^2$ adalah $\hat{\mu} = 1{,}5720$ dan $\hat{\sigma}^2 = 0{,}9497$.

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (4.3) dan (4.4) akan dilakukan estimasi selang kepercayaan untu μ dan σ^2 dari data waktu hidup tikus. Dengan menggunakan Lampiran 5 maka diperoleh matriks informasi fishernya sebagai berikut:

$$\boldsymbol{I}_0 = \begin{bmatrix} 29{,}5957 & -2{,}7416 \\ -2{,}7416 & 55{,}0023 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\boldsymbol{I}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0339 & 0{,}0016 \\ 0{,}0016 & 0{,}0182 \end{bmatrix}$$

diperoleh $(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{11} = 0{,}0339$ dan $(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{22} = 0{,}0182$. Misalkan diberi tingkat signifikasi $\alpha = 5\%$ dengan nilai $\hat{\mu} = 1{,}5720$ dan $\hat{\sigma}^2 = 0{,}9497$, maka

$$P\left\{\hat{\mu} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{11}} \le \mu \le \hat{\mu} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{11}}\right\} = 1-\alpha$$

$\Leftrightarrow P\{1{,}2109 \le \mu \le 1{,}9331\} = 95\%$

Jadi, interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ adalah $[1{,}2109; 1{,}9331]$.

Selanjutnya untuk σ^2

$$P\left\{\hat{\sigma}^2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{22}} \le \sigma^2 \le \hat{\sigma}^2 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{I}_0^{-1})_{22}}\right\} = 1-\alpha$$

$\Leftrightarrow P\{0{,}6848 \le \sigma^2 \le 1{,}2146\} = 95\%$

Jadi, interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk σ^2 adalah $[0{,}6848; 1{,}2146]$.

3.4 Penerapan Hasil Estimasi Parameter pada Data

Pada bagian ini dibahas mengenai pengaplikasian hasil estimasi parameter distribusi Log-Normal pada data waktu hidup tikus berdasarkan penyensoran tipe II. Sebelumnya, telah diperoleh estimasi parameter $\hat{\mu} = 1{,}5720$ dan $\hat{\sigma}^2 = 0{,}9497$, maka akan dilanjutkan bagaimana interpretasi dan penerapannya.

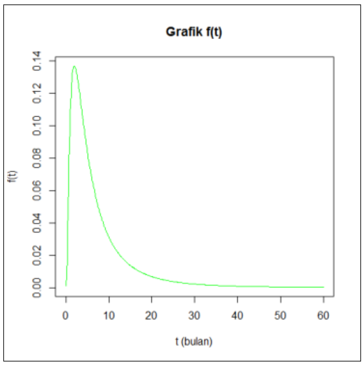
Fungsi kepadatan peluang (pdf) distribusi Log-Normal berdasarkan persamaan (2.10), yaitu:

$$f(t;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma t}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, t>0$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\,0{,}9497t}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-1{,}5720}{0{,}9497}\right)^2\right\}$$

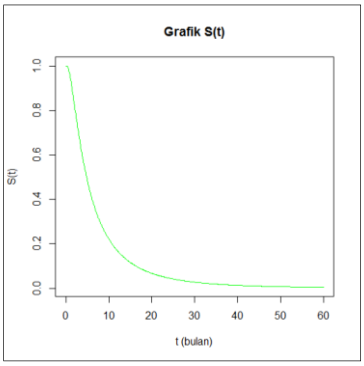
Pada Gambar 4.1 peluang kematian tikus akan semakin besar pada saat disekitar $t = 2$ bulan dengan peluang kematian adalah 0,1368. Hal ini menunjukkan bahwa mencit mengalami kematian rata-rata terjadi pada saat di sekitaran $t = 2$ bulan.

Jika diprogram menggunakan *software* R diperoleh grafik sebagai berikut.



Gambar 4.1 Grafik pdf Distribusi $ln\, N\ (1{,}5720; 0{,}9497)$

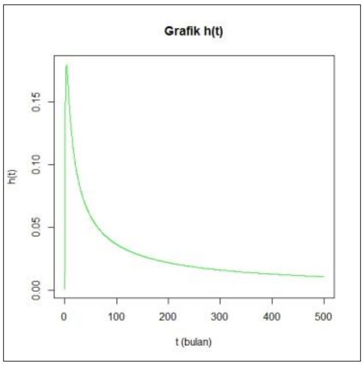
Fungsi *survival* $S(t)$ yaitu peluang suatu item untuk bertahan hidup. Fungsi *survival* untuk distribusi Log-Normal dinyatakan sebagai $S(t) = 1 - \phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)$ memiliki grafik sebagai berikut.



Gambar 4.2 Grafik Fungsi Survival $ln\, N\ (1{,}5720; 0{,}9497)$

Pada Gambar 4.2 dapat dilihat bahwa $S(t)$ mengalami penurunan seiring bertambahnya nilai t, misalnya pada saat $t = 1$ terlihat $S(0) = 1$ atau peluang tikus bertahan hidup saat dinyatakan lahir adalah pasti, sedangkan pada saat $t = 50$ bulan maka $S(50) = 0{,}0068$. Sehingga, berdasarkan Gambar 4.2 dapat disimpulkan bahwa maksimal waktu tahan hidup mencit adalah hanya dalam waktu 50 bulan.

Fungsi *hazard* $h(t)$, yaitu laju kegagalan suatu item untuk bertahan hidup. Fungsi *hazard* untuk distribusi Log-Normal dinyatakan sebagai $h(t) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma t}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}}{1-\phi\left(\frac{\log t-\mu}{\sigma}\right)}$. Pada Gambar 4.3 dapat dilihat bahwa $h(t)$ mengalami kenaikan dibulan awal sampai bulan ke-10. Laju kematian tikus akan semakin besar pada saat disekitar $t = 3$ bulan dengan peluang kematian 0,1789. Kemudian, semakin lama waktu hidup tikus maka semakin berkurang laju kematiannya.



Gambar 4.3 Grafik Fungsi Hazard
$ln\, N\,(1{,}5720; 0{,}9497)$

4. Penutup

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan penelitian dan pembahasan pada bab IV, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Estimasi parameter dari distribusi Log-Normal berdasarkan sampel tersensensor tipe II dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* diperoleh dari penyelesaian persamaan berikut:

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}\left(\ln t_{(i)} - \mu\right) + \frac{(n-r)}{S\left(t_{(r)}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} = 0 \qquad (5.1)$$
$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\pi\sigma^4}\sum_{i=1}^{r}\left(\ln t_{(i)} - \mu\right)^2 + \frac{(n-r)}{S\left(t_{(r)}\right)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\left(\frac{1}{2(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\ln t_{(r)} - \mu\right)\right) = 0 (5.2)$$

Persamaan (5.1) dan (5.2) tidak dapat diselesaikan secara analitik untuk μ dan σ^2. Oleh karena itu, diterapkan metode numerik menggunakan iterasi Newton-Raphson menggunakan *software* R. Kemudian, diperoleh penduga maksimum *likelihood* dari parameter μ dan σ^2 adalah $\hat{\mu} = 1{,}5720$ dan $\hat{\sigma}^2 = 0{,}9497$ untuk data wakti hidup tikus.

2. Selang kepercayaan parameter populasi distribusi Log-Normal berdasarkan sampel tersensor tipe II dengan menggunakan sifat asimtotik MLE diperoleh selang kepercayaan untuk parameter μ dan σ^2 pada tingkat signifikasi $\alpha = 5\%$ yaitu berada pada selang $1{,}2109 \le \mu \le 1{,}9331$ dan $0{,}6848 \le \sigma^2 \le 1{,}2146$.

3. Penerapan dari estimasi parameter distribusi Log-Normal pada waktu hidup tikus diperoleh informasi bahwa tikus mengalami kematian rata-rata pada saat di sekitaran $t = 2$ bulan. Maksimal waktu tahan hidup tikus adalah dalam waktu 50 bulan. Kemudian, semakin lama hidup tikus maka semakin berkurang laju kematiannya.

4.2 Saran

Saran yang dapat penulis berikan untuk penelitan selanjutnya adalah peneliti dapat melakukan estimasi distribusi Log-Normal untuk sampel tersensor dengan menggunakan metode lain atau menunjukkan estimasi parameter untuk distribusi lain dan penulis juga menyarankan agar penelitian selanjutnya menggunakan tipe penyensoran lainnya seperti penyensoran tipe I dan tipe II progresif serta perlu dilakukan pengujian hipotesis terhadap parameter.

Ucapan Terima Kasih. Penulis menyampaikan terima kasih kepada ibu dan bapak dosen pembimbing atas arahan dan perhatiannya sehingga penelitian ini dapat terselesaikan dengan baik. Penulis juga berterima kasih kepada seluruh pihak yang membantu dan mendukung penelitian ini.

Daftar Pustaka

[1] Adrianingsih, N. Y., dan Andrea, T. R. D. (2021). Estimasi Model Regresi Semiparametrik *Spline Truncated* Menggunakan Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). *Jambura Journal of Probability and Statistics*. 2 (2). 56-63.

[2] Aitkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. *Second Edi*tion. New York: John Willey & Sons, Inc.

[3] Balakrishnan, N., dan Cramer, E. (2014). *The Art of Progressive Censoring*. Canada: Birkhäuser.

[4] Batarius, P. (2018). Perbandingan Metode Newton-Raphson Modifikasi Dan Metode *Secant* Modifikasi Dalam Penentuan Akar Persamaan. *Seminar Nasional Riset Dan Teknologi Terapan*, *8* (Ritektra 8), 53–63.

[5] Collect, D. (1997). *Modelling Survival Data in Medical Research Third Edition*. New York: Taylor and Francis Group.

[6] Ginos, B. F. (2009). *Parameter Estimation for the Lognormal Distribution*. [Thesis]. *Departement of Statistics*: *Brigham Young University*. Provo.

[7] Harlan, J. (2017). Analsis Survival. Depok: Gunadarma.

[8] Hidayah, R. E., Salam, N., dan Susanti, D. S. (2013). Estimasi Parameter untuk Distribusi Half Logistik. *Jurnal Fasilkom*, 7(1), 45–52.

[9] Hidayat, R. (2016). Penggunaan Metode Kaplan-Meier dan *Life Table* Analisis Ssurvival untuk Data Tersensor. *Jurnal Dinamika*, 7(1), 1–8.

[10] Lawless, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. Amerika Serikat: Wiley.

[11] Nashar, L. O., Asriadi, dan Isa, D. R. (2022). Analisis Data Tersensor Kanan dengan Metode Cox Proportional *Hazard* Model. *JOSTECH: Journal of Science and Technology*, 2(2), 143–152.

[12] Ni'mah, R., dan Arief Agoestanto. (2014). Unnes Journal of Mathematics Education. *UJM*, *3*(2), 111–117.

[13] Paeto, C. D. P. ., Somayasa, W., Ruslan, Djafar, M. K., Budiman, H., & Sahapati, R. (2022). Estimasi Parameter Dari Distribusi Weibull Berdasarkan Sampel Tersensor Tipe II Dan Tipe I. *Jurnal Matematika Komputasi Dan Statistika*, 2(3), 1–15.

[14] Purwanto, M. S., Somayasa, W., Alfian, & Rahmalia, S. (2023). Estimasi Parameter dari Distribusi Weibull Berdasarkan Sampel Tersensor Tipe II Progresif. *Jurnal Matematika Komputasi Dan Statistika*, 3(2), 337–345.

[15] Putri, S.S. dan Budyanra. (2021). Penerapan Metode *Firth's Penalized Maximum Likelihood Estimation* pada Analisis Determinan Penyalahgunaan Narkoba Remaja Indonesia Tahun 2017. *Jurnal Statistika*, 21 (2), 117-124.

[16] Salaam, A. F., Somayasa, W., dan Kabil, D. M. (2023). Estimasi Parameter Distribusi Gamma Untuk Sampel Tersensor Tipe I dan Tipe II, 238–244.

[17] Sanusi, W., Alimuddin, A., dan Sukmawati, S. (2019). Model Regresi Cox dan Aplikasinya dalam Menganalisis Ketahanan Hidup Pasien Penderita Diabetes Mellitus di Rumah Sakit Bhayangkara Makassar. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, 1 (1), 62.

[18] Syafik, A. (2007). Aplikasi Distribusi Log Normal dalam Statistika. *Limit*, 4, 1–11.

[19] Tresnawanti, D., Fatekurohman, M., dan Alfian Futuhul Hadi. (2018). Fungsi Likehood Pada Data Tersensor Interval Univariat (*Likelihood Function For Univariat Interval Censored Data*). *E-Journal Unej*, 6(2), 75–78.

Diterima tgl. 19 September 2024
Direvisi tgl. 7 Desember 2024
Disetujui untuk terbit tgl. 15 Desember 2024